Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Aproximación no lineal con bases de ondículas

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Matemáticas

por

Maria de Natividade

Dirigida por

D. Eugenio Hernández Rodríguez

Madrid, 2010

Índice general

Agradecimientos

En este pequeño resumen quiero saldar la deuda contraída con todas las personas que han hecho posible este proyecto, agradeciéndoselo profundamente.

Primero y antes que nada, dar gracias a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino aquellas personas que han sido mi soporte y compañia durante todo el periodo de estudio.

A mi director de tesis, Eugenio Hernández. Me acuerdo como si fuera hoy, cuando un día durante mi segundo año en el departamento, estando yo en la sala 400 para comer, Gustavo Garrigós me preguntó si ya tenía director de tesis. Fué él quien me propuso que hablara con Eugenio Hernández. Decir, que Eugenio ha sobrepasado el límite de lo que puede esperarse de un director de tesis, como persona y como matemático, sería quedarse corto. Él me ha enseñado, con paciencia y dedicación infinitas, todo lo que sé sobre Análisis armónico y teoría de aproximación y casi todo lo que sé sobre matemáticas. Ha soportado mis dificultades de base y mis altibajos, apoyándome hasta el último momento. Sin su dedicación y generosidad no hubiera sido posible este trabajo. Puedo estar orgullosa de haber tenido un excelente y verdadero director de tesis.

Cuando se lleva a cabo la tesis doctoral, normalmente se realiza como una actividad extralaboral, lo cual significa menos dedicación y atención a la familia. Es por ello que quiero expresarle mi agradecimiento a mi hijo mayor, Didier Jorge, por desempeñar el papel de padre de sus hermanos durante todos estos años que llevo en España, a pesar de ser también un niño. Espero con todo deseo que llegue a entender el motivo por el que ha tenido que perder su niñez para ayudarme en este proyecto, y para que le quede el recuerdo de un ideal realizado, en gran parte con su ayuda. También gracias, una y otra vez a mis hijos pequeños y espero que también lleguen a entender algún día el motivo por el que durante tantas horas no he podido dedicarles la atención que merecen. A mi marido porque a pesar de la distancia, el apoyo, ánimo y paciencia me han dado la fortaleza de poder seguir. A mi amiga Ana Paula, por ayudarme a conciliar mis estudios com mi trabajo en Angola, quedándose con mis hijos todos los veranos.

Esta tesis representa el fruto de varios años en el 513. A mis compañeros de despacho, Adrián, Fernando, José António, Elías y Mari Luz. No tengo palabras para describir todo el apoyo, ánimo, cariño y lo que me han enseñado durante todos estos años. Muchísimas gracias. En general, quiero expresar mi agradecimiento a todos los becarios y la gente del departamento, ya que, desde los ámbitos que a cada uno compete, siempre me han dado todo el apoyo, colaboración y cariño.

A todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de esta tesis doctoral y que no necesito nombrar porque tanto ellos como yo sabemos que desde lo más profundo de mi corazón les agradezco el haberme brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

Por último mi agradecimiento al gobierno de Angola, en particular la facultad de ciencias de la universidade Agostinho Neto, por haber financiado mis estudios. Espero poner mi grano de arena para el desarrollo y la mejora de la calidad de la enseñanza superior en Angola.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia y motivación

La aproximación de una función por una combinación lineal de vectores, elegidos de entre una colección prefijada, es una forma de aproximación con un rango de aplicaciones muy grande, desde el análisis al procesamiento de señales, estimación estadística y solución numérica de ecuaciones diferenciales.

Es de destacar que la evolución de la teoría de aproximación y del cálculo numérico siguieron más o menos la misma línea. Los primeros métodos utilizaron para la aproximación subespacios vectoriales de dimensión finita. En un principio, éstos fueron, por regla general, los subespacios de polinomios de grado N, tanto algebraicos como trigonométricos.

Uno de los objetivos centrales de la teoría de aproximación es caracterizar el conjunto de funciones que tienen un orden de aproximación establecido por un determinado método de aproximación. De forma precisa, dado un esquema de aproximación $\{(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}}), \Sigma_N\}$, donde $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ es un espacio de funciones a aproximar y $\{\Sigma_N\}_{N\geq 1}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{X}$, sea $\sigma_N(f, \Sigma_N)_{\mathbb{X}}$ el error de aproximación de $f \in \mathbb{X}$ por los elementos de Σ_N, es decir,

$$\sigma_N(f, \Sigma_N)_{\mathbb{X}} := \inf_{g\in\Sigma_N} \|f - g\|_{\mathbb{X}} \tag{1.1}$$

se pretende caracterizar las funciones $f \in \mathbb{X}$ que tienen un dado orden de aproximación. Por ejemplo, se pretende describir el conjunto $\mathcal{A}^{\alpha}_{\infty}(\mathbb{X}, \Sigma_N),\ \alpha > 0$, que consiste de todas las funciones $f \in \mathbb{X}$ que tiene un orden de aproximación $\sigma_N(f, \Sigma_N)_{\mathbb{X}} = O(N^{-\alpha}),\ N \longrightarrow \infty$. Una familia de espacios de aproximación más general se denota por $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathbb{X}, \Sigma_N),\ \alpha, q > 0$ y consiste de todas las funciones $f \in \mathbb{X}$ tales que

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^{\alpha}\sigma_N(f, \Sigma_N)]^q \frac{1}{N} \tag{1.2}$$

es finita. Los problemas fundamentales sobre el orden de aproximación se resolvieron en el marco de los espacios de polinomios principalmente por la escuela rusa de Bernstein, Chebyshev, y sus descendientes matemáticos. Los primeros resultados en esta materia se remontan a comienzo del siglo pasado (1911) y al trabajo de D. Jackson ([37]) y S. N. Bernstein ([5]) que entre otros resultados probaron que una función f, continua y periódica de período 2π, tiene un orden de aproximación de $O(N^{-\alpha}),\ 0<\alpha<1$, cuando se aproxima por polinomios trigonómetricos de grado N en la norma uniforme si y sólo si $f \in Lip\ \alpha$. A continuación hacemos más explícitos estos resultados.

Sea $C(\mathbb{T})$ el espacio de funciones continuas y periódicas de período 2π en $\mathbb{T}$ y $\mathcal{T}_N$ el conjunto de todos los polinomios trigonométricos de orden $\leq N$.

Definición 1.1.1. *Sea $0<\alpha\leq 1$. El espacio de Lipschitz $Lip\ \alpha$, consiste de todas las funciones $f\in C(\mathbb{T})$ para las que existe $M>0$ tal que*

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}, \quad \forall\ x,y\in\mathbb{T}$$

Denotamos por

$$\sigma_N(f,\mathcal{T}_N)_\infty = \inf_{t\in\mathcal{T}_N} \|f-t\|_\infty.$$

el error de aproximación de $f\in C(\mathbb{T})$ por los elementos de $\mathcal{T}_N$. En 1911 Jackson probó el siguiente resultado

Teorema 1.1.2. *([37]) Sea $f\in C(\mathbb{T})$. Entonces para toda $f\in Lip\ \alpha,\ 0<\alpha<1$, se tiene*

$$\sigma_N(f,\mathcal{T}_N)_\infty \leq CN^{-\alpha}. \tag{1.3}$$

En el año siguiente Bernstein probó la implicación contraria.

Teorema 1.1.3. *([5]) Sean $f\in C(\mathbb{T})$ y $\alpha\in(0,1)$ tal que*

$$\sigma_N(f,\mathcal{T}_N)_\infty \leq AN^{-\alpha}, \quad \forall\ N=1,2,3,\dots$$

donde $A>0$ no depende de N. Entonces $f\in Lip\ \alpha$.

De estos dos resultados se deduce el siguiente:

Teorema 1.1.4. *Sea $f\in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ y $0<\alpha<1$. Entonces $\sigma_N(f,\mathcal{T}_N)_\infty = O(N^{-\alpha})$ si y sólo si $f\in Lip\ \alpha$.*

A partir de la década de 1950 vino el desarrollo de polinomios a trozos y splines y su incorporación al cálculo numérico. Tenemos en mente los métodos de elementos finitos y sus homólogos en otras áreas como la cuadratura numérica y estimación estadística.

Se notó después que había algún tipo de ventajas que se pueden obtener al no limitar las aproximaciones a venir de espacios lineales, y de ahí surgió el comienzo de la aproximación no lineal. En la década de 1960, el tema de la aproximación se redujo en gran parte al estudio de métodos no lineales (para más detalles sobre el desarrollo histórico de la aproximación no lineal ver [16]). Sin embargo, hasta finales del siglo pasado, no se consiguió la caracterización de los espacios de aproximación por funciones racionales y por splines. El primer trabajo en esta dirección es debido a V. Peller ([58]) que caracterizó los espacios de aproximación con funciones racionales en la norma BMO.

En 1986 P.P. Petrushev probó en [62] las desigualdades de tipo Jackson y Bernstein para la aproximación por splines de orden k en $L^p[0,1]$. Estos dos resultados permitieron identificar los espacios de aproximación por funciones racionales y splines de orden k como espacios de Besov.

Sean $S(k,N)$, el conjunto de todos los splines de orden $k-1$ con $N+1$ nodos libres en $[0,1]$. Denotamos por

$$s_N^k(f)_p = \inf_{s\in S(k,N)} \|f-s\|_{L^p[0,1]}. \tag{1.4}$$

el error de aproximación de $f \in L^p[0,1]$ por los elementos de $S(k,N)$.

Para $h \in \mathbb{R}$, denotamos por T_h el operador translación $T_h f := f(\cdot + h)$ y por $\Delta_h := T_h - I$ el operador diferencia, donde I es el operador identidad. Entonces, para cualquier $r = 1, 2, \dots$, $\Delta_h^r := \Delta_h[\Delta_h^{r-1}] = (T_h - I)^r$ es el operador diferencia de orden r. Claramente

$$\Delta_h^r(f,x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} f(x+kh), \tag{1.5}$$

cuando $x, \dots, x+rh \in [0,1]$ (de otro modo definimos $\Delta_h^r f(x) = 0$). Definimos el r-ésimo modulo de suavidad de $f \in L^p[0,1],\ 0 < p \le \infty$, por

$$w_r(f,t) := \sup_{0<h\le t} \|\Delta_h^r(f,\cdot)\|_{L^p[0,1]}, \quad 0 < t \le 1. \tag{1.6}$$

Definición 1.1.5. *(ver [17]) Sean $\alpha > 0$ y $r := [\alpha]+1$. Para $0 < p, q \le \infty$, el espacio de Besov $B_q^\alpha(L^p[0,1]) = B_{p,q}^\alpha[0,1]$, es el conjunto de todas funciones $f \in L^p[0,1]$ tales que*

$$|f|_{B_q^\alpha(L^p[0,1])} := \begin{cases} \left(\int_0^1 [t^{-\alpha} w_r(f,t)_p]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \\ \sup_{0<t\le 1} t^{-\alpha} w_r(f,t)_p, & q = \infty \end{cases} \tag{1.7}$$

es finita.

La expresión (1.7) define una cuasi-seminorma en $B_q^\alpha(L^p[0,1])$; la cuasi-norma en estos espacios es dada por $\|f\|_{B_q^\alpha(L^p[0,1])} := |f|_{B_q^\alpha(L^p[0,1])} + \|f\|_{L^p[0,1]}$.

Si $p = q$, escribimos $B_{p,p}^\alpha[0,1] = B_p^\alpha[0,1]$.

Teorema 1.1.6. *(P.P. Petrushev, [62]) Sean $\alpha > 0,\ 0 < p < \infty,\ \sigma > 0$ y $k \ge 1$, tales que $\frac{1}{\sigma} = \alpha + \frac{1}{p}$. Entonces existe $C = C(\sigma,p,k) > 0$ tal que para toda $f \in B_\sigma^\alpha[0,1]$ y para todo $N = 1, 2, \dots$ se tiene*

$$s_N^k(f)_p \le C N^{-\alpha} \|f\|_{B_\sigma^\alpha[0,1]}, \tag{1.8}$$

Teorema 1.1.7. *(P.P.Petrushev, [62]) Sean* $k \geq 1,\ 0 < p < \infty,\ \alpha > 0$ *y* $\frac{1}{\sigma} = \alpha + \frac{1}{p}$. *Entonces existe una constante* $C = C(\alpha, p, k) > 0$, *tal que para todo* $N \geq 1$ *y todo* $s \in S(k, N)$,

$$\|s\|_{B^{\alpha}_{\sigma}[0,1]} \leq CN^{\alpha}\|s\|_{L^p[0,1]}. \tag{1.9}$$

Utilizando las desigualdades (1.8), (1.9) y las propiedades del K-funcional (ver capítulo 2 para la definición y propiedades del K-funcional), Pencho P. Petrushev probó en [62] que los espacios de aproximación por splines de orden $k-1$ con $N+1$ nodos libres, $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(L^p[0,1], S(k,N))$ se pueden identificar como espacios de Besov (ver [62], Corolario 2.2):

Corolario 1.1.8. *(P.P. Petrushev, [62]) Sean* $0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty,\ 0 < \gamma < \alpha,\ k \geq 1$ *y* $\frac{1}{\sigma} = \alpha + \frac{1}{p}$. *Entonces*

$$\mathcal{A}^{\gamma}_{q}(L^p[0,1], S(k,N)) = (L^p[0,1], B^{\alpha}_{\sigma}[0,1])_{\gamma/\alpha, q} \tag{1.10}$$

con las cuasi-normas equivalentes. En particular, si $q = \sigma$ *se tiene*

$$\mathcal{A}^{\gamma}_{\sigma}(L^p[0,1], S(k,N)) = B^{\gamma}_{\sigma}[0,1] \tag{1.11}$$

con las cuasi-normas equivalentes.

Estos resultados motivaron que R. A. DeVore y V. A. Popov en el mismo año (1986) probasen que en muchos casos la caracterización de los espacios de aproximación $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathbb{X}, \Sigma_N)$, se deduce estableciendo las desigualdades de tipo Jackson y Bernstein ([18]). Dado un número $r > 0$, sea $\mathbb{Y}_r$ un subespacio de $\mathbb{X}$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots,$ $\mathbb{Y}_r$ satisface las siguientes desigualdades: existe $C > 0$ tal que

$$\sigma_N(f, \mathbb{Y}_r)_{\mathbb{X}} \leq CN^{-r}\|f\|_{\mathbb{Y}_r}\ f \in \mathbb{Y}_r,\ (\textit{Desigualdad de tipo Jackson}), \tag{1.12}$$

y existe $C' > 0$ tal que $\forall N = 1, 2 \ldots$

$$\|g\|_{\mathbb{Y}_r} \leq C'N^{r}\|g\|_{\mathbb{X}},\ \forall g \in \Sigma_N \quad (\textit{Desigualdad de tipo Bernstein}). \tag{1.13}$$

Entonces el siguiente resultado prueba que los espacios $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathbb{X}, \Sigma_N),\ 0 < \alpha < r,\ 0 < q \leq \infty$, se pueden caracterizar como espacios de interpolación entre $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}_r$ (las condiciones que debe cumplir la colección Σ_N pueden verse en la sección 2.1).

Teorema 1.1.9. *(R. A. DeVore y V. A. Popov, [18]) Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *un espacio de funciones e* $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_r$ *un subespacio de* $\mathbb{X}$. *Si* $\mathbb{Y}_r$ *satisface las desigualdades de Jackson (1.12) y Bernstein (1.13), entonces para* $0 < \alpha < r$ *y* $0 < q \leq \infty$, *tenemos*

$$\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathbb{X}, \Sigma_N) = (\mathbb{X}, \mathbb{Y}_r)_{\alpha/r, q}. \tag{1.14}$$

Usando el resultado anterior (ver [18]) R. A. DeVore y V. A. Popov probaron de nuevo, el Corolario 1.1.8.

De las siguientes relaciones entre la mejor aproximación por funciones racionales y por "splines" se puede obtener la caracterización de los espacios de aproximación para la aproximación por funciones racionales utilizando la igualdad (1.11). Sea $R(N)$ el espacio de todas funciones racionales de grado $\leq N$. Denotamos por $r_N(f)_p$ el error de aproximación de $f \in L^p[0,1],\ 1 \leq p < \infty$ por funciones racionales. Por un lado, P.P. Petrushev probó en [61] la siguiente desigualdad: para $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > 0$ tenemos

$$r_N(f)_p \leq CN^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N} (m+1)^{\alpha-1} s_m^k(f)_p \tag{1.15}$$

para $k > \alpha$ y $C = C(p,k,\alpha)$. Por otro lado, P. Pekarski probó en [59] la desigualdad siguiente: para $1 < p \leq \infty$ se tiene

$$s_N^k(f)_p \leq CN^{-k} \Big\{ \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m+1} ((m+1)^k r_m(f)_p)^\sigma \Big\}^{\frac{1}{\sigma}} \tag{1.16}$$

con $N = 1, 2 \ldots,\ \frac{1}{\sigma} = k + \frac{1}{p}$ y $C = C(k,p)$.
De estos dos resultados se obtiene la siguiente caracterización de los espacios de aproximación por funciones racionales

Teorema 1.1.10. *(DeVore y Popov, [18]). Sea $R(N)$ el conjunto de funciones racionales de grado $\leq N$. Para cualesquiera $\alpha, q > 0$ y $1 < p < \infty$ se tiene*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(L^p[0,1], R(N)) = \mathcal{A}_q^\alpha(L^p[0,1], S(k,N)), \quad si\ \alpha < k. \tag{1.17}$$

En particular,

$$\mathcal{A}_\sigma^\alpha(L^p[0,1], R(N)) = B_\sigma^\alpha[0,1], \tag{1.18}$$

siempre que $\frac{1}{\sigma} = \alpha + \frac{1}{p}$.

Otro acontecimiento notable ocurrió en la década de 1980 con el desarrollo de las ondículas a la sombra del análisis armónico y de la teoría de aproximación, con aplicaciones en el contexto de procesamiento de imágenes. Desde el punto de vista de la teoría de aproximación y análisis armónico las ondículas son muy importantes por muchos motivos. Para nuestro propósito destacamos que son bases incondicionales para muchos espacios de funciones como los espacios de Lebesgue, Hardy, Sobolev, Besov, Triebel-Lizorkin y todos los espacios de funciones invariantes por reordenamiento con los índices de Boyd entre 0 y 1, (ver [51, 33, 69]). Por lo tanto, es natural buscar aproximaciones seleccionando términos de la serie que representa a una función en una base de ondículas. Si tomamos sumas parciales de la serie, se trata de la aproximación lineal. Sin embargo, también es posible dejar que los términos seleccionados dependan de la función a aproximar y mantener sólo el control sobre el número de términos a utilizar. Esta es una forma de aproximación no lineal que se llama *aproximación con N términos*. Vamos a proceder a una introducción más sistemática de los conceptos de la aproximación no lineal.

Aunque la aproximación no lineal puede tomar varias formas, su forma natural es la aproximación con N términos. Dado un espacio cuasi-normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, sea $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base para $\mathbb{X}$. Para cada $N \geq 0$, denotamos por $\Sigma_N(\mathcal{B})$ el conjunto de todos los elementos de la forma

$$S = \sum_{k\in\Lambda} a_k e_k \tag{1.19}$$

donde $|\Lambda| \leq N$. Por lo tanto, los elementos de $\Sigma_N(\mathcal{B})$ se pueden escribir como combinación lineal de como mucho N elementos de la base $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. En el caso $N = 0$ definimos $\Sigma_0 = \{0\}$. Está claro que el conjunto $\Sigma_N(\mathcal{B})$ no es un subespacio lineal. La suma de dos elementos en $\Sigma_N(\mathcal{B})$ en general necesitará de $2N$ términos en su representación por los elementos e_k. Si $x \in \mathbb{X}$, el error de aproximación con N-términos usando los elementos de la base $\mathcal{B}$ con el esquema de aproximación Σ_N es dado por

$$\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} := \sigma_N(x, \mathcal{B}, \mathbb{X}) := \operatorname*{ínf}_{S\in\Sigma_N(\mathcal{B})} \|x - S\|_{\mathbb{X}}, \quad N \geq 0. \tag{1.20}$$

Notemos en particular que $\sigma_0(x)_{\mathbb{X}} = \|x\|_{\mathbb{X}}$.

Dado un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, hay dos cuestiones fundamentales que se plantean en un problema de aproximación y que son las siguientes:

1. Encontrar algoritmos simples y rápidos capaces de producir casi mejores aproximaciones $x_N \in \Sigma_N$ para $x \in \mathbb{X}$.

2. Investigar el índice de decaimiento del error de aproximación $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}$. Es decir, dado un índice de decaimiento, por ejemplo, $N^{-\alpha}$, determinar la clase de elementos $x \in \mathbb{X}$ tales que $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} \leq CN^{-\alpha}$ para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$. Más generalmente, caracterizar los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$, de todos $x \in \mathbb{X}$ tales que

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} = \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{N\geq 1}(N^\alpha \sigma_N(x)_{\mathbb{X}})^q \frac{1}{N}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N\geq 1} N^\alpha \sigma_N(x)_{\mathbb{X}}, & q = \infty \end{cases}$$

es finita, con $\alpha > 0$.

Un algoritmo ampliamente investigado en los últimos años, capaz de producir en muchos casos aproximaciones casi óptimas con N-términos, es el *algoritmo avaricioso* (en inglés *greedy algorithm*), (ver [72]). Si $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j \in \mathbb{X}$ y π es cualquier biyección de $\mathbb{N}$ tal que

$$\|a_{\pi(1)}e_{\pi(1)}\|_{\mathbb{X}} \geq \|a_{\pi(2)}e_{\pi(2)}\|_{\mathbb{X}} \geq \|a_{\pi(3)}e_{\pi(3)}\|_{\mathbb{X}} \geq \dots \tag{1.21}$$

(tomados arbitrariamente cuando hay empates), el *algoritmo avaricioso de etapa N* es la correspondencia,

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j \in \mathbb{X} \longmapsto G_N^\pi(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{\pi(j)} e_{\pi(j)} \in \Sigma_N. \tag{1.22}$$

Siempre es cierto que $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} \leq \|x - G_N^\pi(x)\|_{\mathbb{X}}$. Si $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es cierto $\sigma_k(x)_{\mathbb{H}} = \|x - G_k^\pi(x)\|_{\mathbb{H}}$ para todo $x \in \mathbb{H}$ y todo $k = 1, 2, 3, \dots$. Para un espacio de Banach esta igualdad puede no ser cierta. Si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C}\|x - G_N^\pi(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \sigma_N(x)_{\mathbb{X}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{X},\ N = 1, 2, \dots, \tag{1.23}$$

decimos que $\mathcal{B}$ es una *base avariciosa* para $\mathbb{X}$. Por lo tanto, para estas bases el algoritmo avaricioso produce una aproximación con N-términos casi óptima, lo que conduce muchas veces a una identificación precisa de los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$. En esta tesis veremos diversos ejemplos de bases avariciosas y otras que no lo son.

Un resultado de S. V. Konyagin y V. N. Temlyakov del año 1999 ([43]) prueba que una base $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, es avariciosa en $\mathbb{X}$ si y sólo si es incondicional y democrática. Democrática significa que para alguna constante $C > 0$,

$$\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{e_j}{\|e_j\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C \Big\| \sum_{j\in\Gamma'} \frac{e_j}{\|e_j\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \tag{1.24}$$

para todos conjuntos de índices $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{N}$ de igual cardinal.

Temlyakov probó en 1998 ([73]) que la base de Haar $\mathcal{H} = \{h_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ en $[0,1]$ es democrática en los espacios de Lebesgue $L^p[0,1]$ para $1 < p < \infty$ y además se tiene

$$\Big\| \sum_{I\in\Gamma} \frac{h_I}{\|h_I\|_p} \Big\|_p \approx |\Gamma|^{\frac{1}{p}} \tag{1.25}$$

para todo $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito.

Cuando las ondículas tienen suficiente decaimiento y suavidad también son bases avariciosas para los espacios $H_p^s(\mathbb{R}^d),\ 0 < p < \infty,\ s \in \mathbb{R}$ ([35]) y para la clase de espacios de Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^d),\ s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$ ([27]).

Sin embargo, las bases de ondículas no son democráticas en otros espacios clásicos, como es el caso de los espacios BMO o los espacios de Besov $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ con $p \neq q$. También en 2006 P. Wojtaszczyk ([77]) probó que la base de Haar $\{h_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ en $L^2[0,1]^d$ no es democrática en ningún espacio de funciones invariantes por reordenamiento distinto de $L^p[0,1]^d,\ 1 < p < \infty$.

Teniendo en cuenta estos resultados es interesante estudiar cómo de lejos está una colección de ser democrática en un espacio. Una de las formas de cuantificar la democracia de una colección $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es considerar las llamadas funciones de democracia de $\mathcal{B}$ por la derecha y por la izquierda

$$h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \sup_{|\Gamma|=N} \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{e_j}{\|e_j\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \tag{1.26}$$

y

$$h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \inf_{|\Gamma|=N} \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{e_j}{\|e_j\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \tag{1.27}$$

respectivamente (véase también [20, 29, 39]). Observe que una base es democrática si estas dos cantidades son comparables para todo $N \geq 1$. Por ejemplo, si $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es fácil ver que $h_l(N) = h_r(N) = N^{\frac{1}{2}}$ y por tanto $\mathcal{B}$ es democrática. Del resultado de Temlyakov mencionado en (1.25) se sigue que la base de Haar es democrática en $L^p[0,1],\ 1 < p < \infty$, puesto que $h_l(N) \approx h_r(N) \approx N^{\frac{1}{p}}$.

En esta tesis calcularemos explícitamente las funciones $h_l(N)$ y $h_r(N)$ para muchos otros pares $(\mathbb{X},\mathcal{B})$ especialmente en el caso no democrático (ver capítulo 4). Por ejemplo, para la base de Haar en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ se puede probar

$$h_l(N) \approx N^{1/\max(p,q)} \text{ y } h_r(N) \approx N^{1/\min(p,q)}$$

(ver sección 4.7). Por otro lado, en los espacios $L^p(\log L)^{\alpha},\ \alpha > 0$, se tiene

$$h_l(N) \approx N^{1/p}(1+\log L)^{-\alpha/p} \text{ y } h_r(N) \approx N^{1/p}$$

(ver [29] o sección 4.5).

Uno de los propósitos de la teoría de aproximación, es caracterizar los espacios de aproximación $\mathcal{A}^{\alpha}_q(\mathcal{B},\mathbb{X})$. Ya hemos mencionado (teorema 1.1.9) que cuando se verifican las desigualdades de tipo Jackson y Bernstein estos espacios se pueden identificar como espacios de interpolación. Cuando la base $\mathcal{B}$ es avariciosa es posible identificar estos espacios con espacios de Lorentz discretos. Por ejemplo, cuando se tiene

$$h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \approx h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \approx N^{\frac{1}{p}},\ 0 < p < \infty \tag{1.28}$$

(y $\mathcal{B}$ es incondicional) los espacios de aproximación se pueden caracterizar como

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) = \Big\{x = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e_j \in \mathbb{X} : \{c_j\|e_j\|_{\mathbb{X}}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^{\tau,q}\Big\}$$

donde $\frac{1}{\tau} = \alpha + \frac{1}{p}$ (ver [40, 27]).

En este trabajo veremos que incluso cuando las funciones de democracia no son potencias o la base no es democrática, es aún posible encontrar caracterizaciones (o inclusiones óptimas) para los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, esta vez en términos de los espacios de Lorentz discretos generales ℓ_η^q, donde el peso η depende de las funciones de democracia (típicamente η será $\{k^\alpha h_l(k)\}$ o bien $\{k^\alpha h_r(k)\}$). Recordemos cómo se definen los espacios ℓ_η^q. Sea $\mathbf{c}_0$ el conjunto de todas las sucesiones $\mathbf{s} = \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ tales que, es posible encontrar una reodenación del conjunto de índices $\mathbb{N} = \{k_j\}_{j=1}^\infty$ satisfaciendo $|s_{k_1}| \geq |s_{k_2}| \geq \ldots$ y además $\lim_{j\longrightarrow\infty} s_{k_j} = 0$. En nuestros resultados siempre supondremos que $\{s_{k_j}\}_{j\geq 1}$ corresponde a esta reodenación, la cual coincide con el reordenamiento no creciente $\mathbf{s}^*$ de la sucesión $\mathbf{s}$.

Sea $\eta = \{\eta(k)\}_{k\geq 1}$ una sucesión de números positivos tal que

a) $\eta(k) \leq \eta(k+1)$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ y $\lim_{k\longrightarrow\infty} \eta(k) = \infty$.

b) η es doblante es decir, existe $C < \infty$ tal que $\eta(2k) \leq C\eta(k),\ k \geq 1$.

Denotaremos por $\mathbb{W}$ el conjunto de las sucesiones que satisfacen *a*) y *b*). Si $\eta \in \mathbb{W}$ y $0 < q \leq \infty$, los **espacios de Lorentz discretos con peso,** $\ell_\eta^q(\mathbb{N})$ se definen como el conjunto de todas las sucesiones $\mathbf{s} = \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbf{c}_0$ tales que

$$\|\mathbf{s}\|_{\ell_\eta^q(\mathbb{N})} = \begin{cases} \Big[\sum_{j\geq 1}(\eta(j)|s_{k_j}|)^q \frac{1}{j}\Big]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_j \eta(j)|s_{k_j}|, & q = \infty. \end{cases} \tag{1.29}$$

El caso particular $\{\eta(k) = k^{\frac{1}{\tau}}\}$ corresponde a los espacios de Lorentz discretos clásicos $\ell^{\tau,q}(\mathbb{N}),\ 0 < \tau < \infty$. El espacio $\ell_\eta^q(\mathbb{N})$ es un espacio cuasi-Banach invariante por reordenamiento (ver [10]) (En la sección 3.3 daremos más detalles sobre estos espacios).

Para nuestros resultados consideramos los siguientes subespacios de $\mathbb{X}$

$$\ell_\eta^q(\mathcal{B},\mathbb{X}) \;=\; \Big\{x = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k \in \mathbb{X} : \{c_k\|c_k\|_{\mathbb{X}}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\eta^q\Big\} \tag{1.30}$$

dotados con la cuasi-norma

$$\|x\|_{\ell_\eta^q(\mathcal{B},\mathbb{X})} = \|\{\|c_k e_k\|_{\mathbb{X}}\}_k\|_{\ell_\eta^q(\mathbb{N})}.$$

En este trabajo nos hemos planteado los siguientes objetivos en el contexto de la aproximación no lineal con N términos:

1. Suponiendo que trabajamos con bases incondicionales $\mathcal{B}$ no necesariamente democráticas en un espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$, describir las mejores inclusiones posibles de los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ usando las clases $\ell_\eta^q(\mathcal{B},\mathbb{X})$. Esto se consigue tomando como pesos η las sucesiones $\{k^\alpha h_l(k)\}$ y $\{k^\alpha h_r(k)\}$.

2. Describir explícitamente las funciones de democracia h_l y h_r cuando se consideran bases de ondículas en varios espacios de funciones para los que las citadas bases son incondicionales.

3. Cuando sea posible, identificar los subespacios $\ell_\eta^q(\mathcal{B},\mathbb{X})$ como espacios de tipo Besov generalizados cuando se consideran bases de ondículas. Se generalizan así resultados clásicos de caracterización de espacios de aproximación en términos de espacios de Besov.

La sección siguiente contiene una exposición de los principales resultados conseguidos y las referencias a las secciones y capítulos en los que se prueban dichos resultados.

1.2. Resultados

Comenzamos describiendo algunos antecedentes sobre estas cuestiones.

Si $\mathcal{B}=\{e_k : k\geq 1\}$ es una base ortonormal para un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, S.B. Stechkin ([70]), y R. A. DeVore y V. N. Temlyakov ([19]), probaron la siguiente igualdad, para $q=1$ y para q general, respectivamente.

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{H})=\ell^{\tau,q}(\mathcal{B},\mathbb{H}),\ \alpha>0,\ 0<q\leq\infty, \tag{1.31}$$

para $\frac{1}{\tau}=\alpha+\frac{1}{2}$, con las normas equivalentes.

Para una base $\mathcal{B}$ incondicional numerable en un espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$ con la propiedad de que existe $p\in(0,\infty)$ tal que

$$\frac{1}{C}|\Gamma|^{\frac{1}{p}}\leq\Big\|\sum_{k\in\Gamma}\frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}}\Big\|_{\mathbb{X}}\leq C|\Gamma|^{\frac{1}{p}} \tag{1.32}$$

para todo conjunto finito $\Gamma\subset\mathbb{N}$, G. Kerkyacharin y D. Picard ([41]) (ver también E. Hernández y G. Garrigós ([27])) probaron en el año 2004 la siguiente caracterización para los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$:

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})=\ell^{\tau,q}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \tag{1.33}$$

donde $\frac{1}{\tau}=\alpha+\frac{1}{p}>0$, con las normas equivalentes.

R. Gribonval y M. Nielsen ([30]) obtuvieron en 2001 las siguientes inclusiones para los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$: si $\mathcal{B}$ satisface que existen $1\leq p\leq q\leq\infty$ y constantes $0<A\leq B<\infty$ tales que cuando $x=\sum_{j\in\mathbb{N}}s_je_j\in\mathbb{X}$ se tiene

$$A\|\{s_j\}\|_{\ell^{q,\infty}} \le \|x\|_{\mathbb{X}} \le B\|\{s_j\}\|_{\ell^{p,1}}, \tag{1.34}$$

entonces

$$\ell^{\tau_p,s}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_s^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^{\tau_q,s}(\mathcal{B},\mathbb{X}),\ 0<\alpha<\infty,\ 0<s\le\infty, \tag{1.35}$$

donde $\frac{1}{\tau_p} = \alpha + \frac{1}{p} > 0$ y $\frac{1}{\tau_q} = \alpha + \frac{1}{q} > 0$.

Es bien conocido que las inclusiones de tipo (1.33) y (1.35) dependen de las desigualdades de tipo Jackson y Bernstein. En este trabajo probamos que están relacionadas con el concepto de democracia introducido por S. V. Konyagin y V. N. Temlyakov ([43]). Por conveniencia para el lector recordamos los conceptos necesarios para enunciar los resultados, aunque algunos ya se han presentado en la sección anterior.

Sea $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$, una base incondicional numerable en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ (ver definición y propiedades en la sección 2.4). Es decir, cada elemento $x \in \mathbb{X}$ se puede representar de forma única por

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e_j \tag{1.36}$$

con la convergencia incondicional en $\mathbb{X}$. Para $N = 0, 1, 2, 3\ldots$ denotamos por Σ_N el conjunto de todos $y \in \mathbb{X}$ que tienen como mucho N coeficientes no nulos en la representación (1.36). El error de aproximación de $x \in \mathbb{X}$ por los elementos de Σ_N se define por

$$\sigma_N(x;\mathcal{B})_{\mathbb{X}} = \sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) := \inf_{y\in\Sigma_N} \|x-y\|_{\mathbb{X}}. \tag{1.37}$$

Consideramos las funciones de democracia por la derecha y por la izquierda de una colección $\mathcal{B}$ en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ y $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ definidas por

$$h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \sup_{|\Gamma|=N} \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{e_j}{\|e_j\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \tag{1.38}$$

y

$$h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \inf_{|\Gamma|=N} \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{e_j}{\|e_j\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \tag{1.39}$$

respectivamente. Una colección $\mathcal{B}$ es democrática en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ si y sólo si $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \approx h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver sección 2.5 para más detalles sobre estas funciones).

Definición 1.2.1. *Para* $\alpha > 0,\ 0 < q \leq \infty$, *los espacios de aproximación* $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ *se definen como el conjunto de todos elementos* $x \in \mathbb{X}$ *tales que la cantidad*

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} := \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{N=1}^{\infty}(N^\alpha \sigma_N(x;\mathcal{B})_{\mathbb{X}})^q \frac{1}{N}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N\geq 1} N^\alpha \sigma_N(x;\mathcal{B})_{\mathbb{X}}, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.40}$$

es finita

(ver sección 3.2 para más detalles sobre estos espacios).

Usando el algoritmo avaricioso $G_N^\pi(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ definido en (1.22) vamos a considerar un espacio similar a $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$. Para $N = 1, 2, \ldots$ y $x \in \mathbb{X}$ sea

$$\gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) := \sup_{\pi} \|x - G_N^\pi(x;\mathcal{B},\mathbb{X})\|_{\mathbb{X}}, \tag{1.41}$$

donde el supremo se toma sobre todas las biyecciones π que satisfacen (1.21) (observése que estamos obligados a tomar este supremo porque π no es necesariamente única).

Las *clases avariciosas* $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}),\ 0 < \alpha < \infty,\ 0 < q \leq \infty$ se definen como el conjunto de todas las funciones $x \in \mathbb{X}$ tales que la cantidad

$$\|x\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} := \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{N=1}^{\infty}(N^\alpha \gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}))^q \frac{1}{N}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N\geq 1} N^\alpha \gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}), & q = \infty, \end{cases} \tag{1.42}$$

es finita (ver las propiedades de estas clases en el capítulo 3).

Puesto que $\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq \gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ para todo $x \in \mathbb{X}$ es evidente que

$$\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \tag{1.43}$$

$0 < q \leq \infty,\ \alpha > 0$. Si la base $\mathcal{B}$ es avariciosa en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, entonces se tiene $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) = \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ con las cuasi-normas equivalentes. En el capitulo 5 daremos ejemplos que prueban que en general la inclusión continua $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ no es cierta. Además, daremos ejemplos que prueban que $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ no es necesariamente un espacio vectorial.

Recordamos que la definición de los espacios de Lorentz discretos con peso $\ell_\eta^q(\mathcal{B},\mathbb{X})$ fue dada en (1.30).

En algunos de nuestros resultados necesitaremos suponer una condición más fuerte en la sucesión $\eta \in \mathbb{W}$. Definimos

$$M_\eta(m) = \sup_{k=1,2,3\ldots} \frac{\eta(k)}{\eta(mk)}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.44}$$

Puesto que estamos suponiendo que η es creciente, es evidente que $M_\eta(m) \leq 1$. Diremos que $\eta \in \mathbb{W}_+$ cuando $\eta \in \mathbb{W}$ y existe algún entero $m_0 > 1$ tal que $M_\eta(m_0) < 1$. Por ejemplo, la sucesión $\eta(k) = k^\alpha(\log(e+k))^\gamma, \alpha > 0 \in \mathbb{W}_+$ (ver el parráfo que sigue (3.19) para más detalles).

En este trabajo se prueban los siguientes resultados, que forman parte del artículo [28](ver Teorema 3.6.1 en este trabajo):

Teorema 1.2.2. *Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espacio cuasi-Banach con una base incondicional numerable $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Sean $0 < \alpha < \infty$ y $0 < q \leq \infty$. Supongamos que $h_l(N)$ es doblante. Entonces, tenemos las siguientes inclusiones continuas:*

$$\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_l(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}). \tag{1.45}$$

Las inclusiones anteriores son óptimas en muchas situaciones en el sentido que se detalla en el capítulo 3.

El Teorema anterior se obtiene como consecuencia de los resultados siguientes en los que se prueba que las inclusiones de (1.45) son equivalentes a que se verifiquen desigualdades de tipo Jackson y Bernstein. Comenzamos con resultados sobre las inclusiones por la izquierda.

Teorema 1.2.3. *(Inclusiones para las clases avariciosas (ver Teorema 3.4.1)) Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una base incondicional numerable en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Fijamos $\alpha > 0$ y $q \in (0, \infty)$. Entonces, para cualquier sucesión η tal que $\{k^\alpha \eta(k)\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{W}_+$ las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$ y todo conjunto $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$ tenemos*

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C\eta(N). \tag{1.46}$$

2. *(Desigualdad de tipo Jackson para $\ell^\infty_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$). Existe $C_\alpha > 0$ tal que para todo $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$*

$$\gamma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \leq C_\alpha (N+1)^{-\alpha} \|x\|_{\ell^\infty_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})}, \tag{1.47}$$

para todo $x \in \ell^\infty_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$

3. $\ell^\infty_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_\infty(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

4. $\ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

5. *(Desigualdad de tipo Jackson para $\ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$). Existe $C_{\alpha,q} > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$*

$$\gamma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \leq C_{\alpha,q} N^{-\alpha} \|x\|_{\ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})}, \tag{1.48}$$

para todo $x \in \ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

Teorema 1.2.4. *(Inclusiones para los espacios de aproximación (ver Teorema 3.4.6)) Sea $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ una base incondicional numerable en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$ fijos. Entonces, para cualquier sucesión $\{\eta(k)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{W}_+$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$ y todo conjunto $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$ tenemos*
$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C\eta(N) \tag{1.49}$$
2. $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.
3. *(Desigualdad de tipo Jackson para $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$). Existe $C_{\alpha,q} > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots,$ tenemos*
$$\sigma_N(x; \mathcal{B})_{\mathbb{X}} \leq C_{\alpha q} N^{-\alpha} \|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \tag{1.50}$$
para todo $x \in \ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

Es bien conocido que la última inclusión en (1.45) depende de las desigualdades de tipo Bernstein. El teorema siguiente prueba que estas inclusiones y las desigualdades de tipo Bernstein están vinculadas con la función de democracia de la base por la izquierda.

Teorema 1.2.5. *(Ver Teorema 3.5.2) Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base incondicional numerable en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$ fijos. Entonces, para cualquier sucesión creciente de números positivos y doblante $\{\eta(k)\}_{k=1}^{\infty}$, es decir $\{\eta(k)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{W}$, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$ y todo $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$ tenemos*
$$\frac{1}{C}\eta(N) \leq \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}. \tag{1.51}$$
2. *(Desigualdad de tipo Bernstein para $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$). Existe $C_{\alpha,q} > 0$ tal que*
$$\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \leq C_\alpha \|x\|_{\mathbb{X}} N^\alpha \quad \textit{para todo } x \in \Sigma_N(\mathcal{B}),\ N = 1, 2, 3, \ldots.$$
3. $\mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.
4. $\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

Conclusión 1.2.6. *Los Teoremas 1.2.3, 1.2.4 y 1.2.5 muestran que para obtener inclusiones para los espacios de aproximación y las clases avariciosas se necesita calcular $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ y $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$. Esto cumple el primer objetivo marcado al final de la sección 1.1. Dichos resultados se han recogido en el artículo [28].*

El capítulo 4 está dedicado a calcular, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia de bases de ondículas en los espacios clásicos del Análisis, principalmente sus versiones con pesos.

Un peso en $\mathbb{R}^d$ es una función definida en $\mathbb{R}^d$ tal que $0 < w(x) < \infty$ c.t. $x \in \mathbb{R}^d$ y localmente integrable. Decimos que w pertenece a la clase de Muckenhoupt A_p, $1 < p < \infty$ ($w \in A_p(\mathbb{R}^d)$), si existe una constante C_w tal que

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\Big)^{p-1} \leq C_w \tag{1.52}$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$, donde $|Q|$ denota la habitual medida de Lebesgue de Q (ver [12] o sección 4.1, para más detalles sobre pesos).

Comenzamos calculando las funciones de democracia del sistema de Haar en $L^p(w)$. Sea $h^0(t) = \chi_{[0,1)}(t)$ y $h^1(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(t)$. Definir E como el conjunto de todas las sucesiones $\varepsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$ tales que $\epsilon_j = 0$ ó 1 y no todos los $\epsilon_j = 0$. Para cada $\varepsilon \in E$ sea

$$h^\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^d h^{\epsilon_j}(x_j).$$

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todos cubos diádicos en $\mathbb{R}^d$ de la forma $Q_{j,k} = 2^{-j}([0,1]^d + k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, de manera que $|Q_{j,k}| = 2^{-jd}$. La colección $\mathcal{H} = \{h_Q^\varepsilon : Q \in \mathcal{D}, \varepsilon \in E\}$ (donde $h_{Q_{j,k}}(x) = |Q_{j,k}|^{-\frac{1}{2}}h(2^jx - k)$) es el **sistema de Haar** en $\mathbb{R}^d$, normalizado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ (ver sección 4.2 para más detalles).

En la subsección 4.2.1 se prueba el resultado siguiente:

Teorema 1.2.7. *(Ver Teorema 4.2.3) Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$. Para el sistema de Haar $\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}^d$ se tiene*

$$h_l(N;\mathcal{H},L^p(w)) \approx h_r(N;\mathcal{H},L^p(w)) \approx N^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto, el sistema de Haar es democrático en $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

En la subsección 4.2.2 damos un contraejemplo que prueba que este Teorema no es cierto si $w \notin A_p(\mathbb{R}^d)$.

En la sección 4.3 calculamos, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia $h_r(N;\mathcal{B},\dot{B}^\Psi_{p,q}(w))$, $h_r(N;\mathcal{B},B^\Psi_{p,q}(w))$, $h_l(N;\mathcal{B},\dot{B}^\Psi_{p,q}(w))$ y $h_l(N;\mathcal{B},B^\Psi_{p,q}(w))$ para los **espacios de Besov homogéneos** con peso y suavidad generalizada $\dot{B}^\Psi_{p,q}(w)$ y los **espacios de Besov** con peso y suavidad generalizada $B^\Psi_{p,q}(w)$, en términos de los exponentes

p y q, cuando $\mathcal{B}$ es una base de ondículas apropiada. Describiremos brevemente los espacios de Besov que usaremos.

Sea $\mathcal{A}_1$ la clase de **núcleos admisibles** definida como el conjunto de funciones $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tales que

$$Supp\,\hat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{2} < |\xi| < 2\} \text{ } y \text{ } |\hat{\varphi}| \geq C > 0 \text{ } si \text{ } \frac{3}{5} < |\xi| < \frac{5}{3}. \tag{1.53}$$

Denotaremos por $\varphi_k(x) = 2^{kd}\varphi(2^k x)$, de modo que $supp\,\widehat{\varphi} \subset \{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$. Definimos $\mathcal{A}_0$ como el conjunto de todas funciones $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tales que

$$Supp\,\widehat{\Phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \leq 2\} \text{ y } |\hat{\Phi}| \geq C > 0 \text{ } si \text{ } |\xi| \leq \frac{5}{3}. \tag{1.54}$$

Siguiendo la notación en [2] llamaremos $\mathfrak{B}$ al conjunto de funciones $\Psi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ tales que $\Psi(1) = 1$ y para todo $t > 0$

$$\sup_{s>0} \frac{\Psi(ts)}{\Psi(s)} < \infty. \tag{1.55}$$

Definición 1.2.8. *Sean* $0 < p, q \leq \infty,\ \varphi \in \mathcal{A}_1,\ \Phi \in \mathcal{A}_0,\ \Psi \in \mathfrak{B}$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}^d$.

*i) El espacio de **Besov homogéneo con peso y suavidad generalizada*** $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ *es el conjunto de todas las distribuciones temperadas* $f \in \mathscr{S}'/\mathcal{P}$ *(módulo polinomios) tales que*

$$\|f\|_{\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\Psi(2^k)\|\varphi_k * f\|_{L^p(w)})^q\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{1.56}$$

*ii) El espacio de **Besov con peso y suavidad generalizada*** $B^{\Psi}_{p,q}(w)$ *es el conjunto de todas las distribuciones temperadas* $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *tales que*

$$\|f\|_{B^{\Psi}_{p,q}(w)} = \|\Phi * f\|_{L^p(w)} + \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (\Psi(2^k)\|\varphi_k * f\|_{L^p(w)})^q\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{1.57}$$

Cuando $w \equiv 1$ y $\Psi(t) = t^\alpha,\ \alpha > 0$, la definición 1.2.8 coincide con las definiciones de espacios de Besov $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$ y $B^{\alpha}_{p,q}$ dadas en [56, 23] y [22]. Los espacios $B^{\alpha}_{p,q}$ coinciden con los espacios de Besov definidos con módulos de continuidad cuando $\alpha > d(\frac{1}{p} - 1)_+$ (ver [56]). Al igual que en la sección 5 de [22] se puede demostrar la equivalencia

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}(w)} \approx \|f\|_{L^p(w)} + \|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w)}, \tag{1.58}$$

cuando $\alpha > 0,\ 1 \leq p < \infty$ y $0 < q \leq \infty$.

Los espacios $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ y $B^{\Psi}_{p,q}(w)$ son cuasi-Banach con las expresiones (1.56) y (1.57) respectivamente (ver sección 4.3 para más detalles sobre estos espacios).

Bajo ciertas condiciones de decaimiento y suavidad, las ondículas proporcionan caracterizaciones simples para muchos espacios de funciones. La norma en estos espacios es equivalente a una norma de sucesiones aplicada a los coeficientes de las ondículas. Para conveniencia del lector damos la definición de **familia de ondículas** y de las **clases de regularidad** a la que pertenecen las familias de ondículas que usamos en nuestros resultados.

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los cubos diádicos en $\mathbb{R}^d$ de la forma $Q_{j,k} = 2^{-j}([0,1]^d + k),\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^d$, de manera que $|Q_{j,k}| = 2^{-jd}$ y todos los cubos de un mismo nivel $j \in \mathbb{Z}$ son distintos.

Definición 1.2.9. *([46]) Una colección finita de funciones $\Phi = \{\psi^1, \ldots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ se dice que es una* ***familia de ondículas*** *si el conjunto*

$$\mathcal{W} = \{\psi^l_{Q_{j,k}}(x) = 2^{\frac{jd}{2}}\psi^l(2^j x - k) : Q_{j,k} \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$$

es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^d)$.

La definición dada aparece en [46]. El lector puede consultar las monografías [51, 14, 33] o [49] para conocer la forma de construir ondículas.

Definición 1.2.10. *Sea r un entero no negativo y $M > 0$. La* ***clase de regularidad*** *$\mathcal{R}^{r,M}$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que*

i) $\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha f(x)dx = 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ 0 \le |\alpha| \le r.$

ii) $|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^M}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$

iii) $|D^\alpha f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^M}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ 0 < |\alpha| \le r+1$

La familia de ondículas de Lemarié-Meyer son elementos de la clase de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ y por tanto también de $\mathcal{R}^{r,M}$ para todo r y M. Las ondículas spline pertenecen a $\mathcal{R}^{r-2,M}$ para todo $M > 0$ si $r \ge 2$ (ya que decaen exponencialmente) si tienen los momentos nulos adecuados. Finalmente, las ondículas de soporte compacto de I. Daubechies con regularidad adecuada también pertenecen a $\mathcal{R}^{r,M}$.

Si $\Phi = \{\psi^j : j = 1, 2, \ldots, L\}$ es una familia de ondículas d-dimensional de Lemarié-Meyer, en el año 2003 S. Roudenko probó en [66] (ver también [67]) la siguiente equivalencia:

$$\|f\|_{\dot{B}^\alpha_{p,q}(w)} \approx \sum_{l=1}^{2^d-1} \Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}} (|Q|^{-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}} |\langle f, \psi^l_Q\rangle| w(Q)^{\frac{1}{p}})^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big]^{\frac{1}{q}}, \tag{1.59}$$

para $\alpha \in \mathbb{R},\ 1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Existen caracterizaciones de los espacios de Besov no homogeneos con peso (M. Izuki e Y. Sawano [36]) y con suavidad generalizada (A. Almeida [2]). Ver detalles en la sección 4.3. Para espacios de Besov isotrópicos, los resultados más completos sobre la caracterización de espacios de Besov con peso pueden encontrarse en M. Bownik ([6]).

En la subsección 4.3.2 probamos resultados del siguiente tipo:

Teorema 1.2.11. *(Ver Corolario 4.3.11) Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$. Si $\mathcal{W}$ es una base de ondículas obtenida a partir de la familia de ondículas d-dimensional de Lemarié-Meyer, se tiene*

$$i)\ h_l(N; \mathcal{W}, \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w)) = \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}$$

y

$$ii)\ h_r(N; \mathcal{W}, \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w)) = \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}.$$

Este resultado resulta sencillo de demostrar porque es consecuencia de $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w) \approx \ell^q(\ell^p)$ donde el isomorfismo está dado por (1.59) usando ondículas.

Como corolario del Teorema 1.2.2 se obtienen caracterizaciones para los espacios $\mathcal{A}^{\alpha}_q(\mathcal{W}, \dot{B}^{\alpha}_{p,p}(w))$ y las clases avariciosas $\mathscr{G}^{\alpha}_q(\mathcal{W}, \dot{B}^{\alpha}_{p,p}(w))$ en términos de espacios de Lorentz discretos. En este trabajo se muestra, como novedad, que estos espacios pueden también identificarse como espacios de Besov con pesos, para lo que se usa el Lema 4.1.5 demostrado en [53]. El resultado es el siguiente

Corolario 1.2.12. *(Ver Corolario 4.3.16) Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq \tau < p < \infty$ y elegir $\alpha > 0$ tal que $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$. Si $w \in A_\tau(\mathbb{R}^d)$ se tiene*

$$\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{d}}_{\tau}(\mathcal{W}, \dot{B}^{s}_{p,p}(w)) = \mathscr{G}^{\frac{\alpha}{d}}_{\tau}(\mathcal{W}, \dot{B}^{s}_{p,p}(w)) = \dot{B}^{\alpha+s}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$$

para cualquier base de ondículas d-dimensional de Lemarié-Meyer.

Cuando $p \neq q$ se prueba el siguiente resultado:

Corolario 1.2.13. *(Ver Corolario 4.3.19) Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq \tau_0 < \tau_1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$ y elegir $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_0 < \infty$ tal que $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\alpha_0}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ y $\frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$. Si $w \in A_{\tau_0}(\mathbb{R}^d)$ se tiene*

$$\dot{B}^{\alpha_0+s}_{\tau_0,\tau_0}(w^{\frac{\tau_0}{p}}) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\frac{\alpha}{d}}_{r}(\mathcal{W}, \dot{B}^{s}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{d}}_{r}(\mathcal{W}, \dot{B}^{s}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \dot{B}^{\alpha_1+s}_{\tau_1,\tau_1}(w^{\frac{\tau_1}{p}})$$

para alguna base de ondículas d-dimensional de Lemarié-Meyer.

Nota 1.2.14. *Existe una caracterización explícita de $\mathcal{A}^{\alpha}_{\tau}(\dot{B}^{\alpha}_{p,q})$ con $p \neq q$ para valores particulares de τ probada por B. Jawerth y M. Milman en [38] (ver detalles en la Nota 4.3.20).*

En la sección 4.4 se prueba que cuando las bases de ondículas tienen suficiente regularidad y suavidad son democráticas en los espacios de **Triebel-Lizorkin homogéneos con peso** $\dot{F}^{s}_{p,q}(w)$ y en los espacios de **Triebel-Lizorkin con peso** $F^{s}_{p,q}(w)$ $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ y $w \in A_p$ un peso apropiado en $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto los espacios de aproximación $\mathcal{A}^{\alpha}_q(\mathcal{B}, \dot{F}^{s}_{p,q}(w))$ y $\mathcal{A}^{\alpha}_q(\mathcal{B}, F^{s}_{p,q}(w))$ y las clases avariciosas

$\mathscr{G}_q^{\alpha}(\mathcal{B}, \dot{F}_{p,q}^s(w))$ y $\mathscr{G}_q^{\alpha}(\mathcal{B}, F_{p,q}^s(w))$ se pueden identificar con los espacios de Besov con peso particulares, cuando $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$ y w un peso apropiado (ver sección 4.4 para más detalles). La novedad de este trabajo está en estudiar el caso general de pesos $w \in A_\infty$ ya que el caso general $w \equiv 1$ se ha estudiado en [35, 27] y [40].

Recordamos al lector la definición de los espacios de Triebel-Lizorkin con peso. Sean $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ como en la definición 1.2.8.

Definición 1.2.15. *Sean $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty,\ \varphi \in \mathcal{A}_1,\ \Phi \in \mathcal{A}_0$ y w un peso en $\mathbb{R}^d$.*

*i) El espacio de **Triebel-Lizorkin homógeneo con peso** $\dot{F}_{p,q}^s(w)$ es el conjunto de todas las distribuciones temperadas $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}$ (módulo polinomios) tales que*

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(w)} = \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{ks}|\varphi_k * f|)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(w)} < \infty. \tag{1.60}$$

*ii) El espacio de **Triebel-Lizorkin con peso** $F_{p,q}^s(w)$ es el conjunto de todas la distribuciones temperadas $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ tales que*

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(w)} = \|\Phi * f\|_{L^p(w)} + \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{ks}|\varphi_k * f|)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(w)} < \infty. \tag{1.61}$$

Cuando $w = 1$ la definición 1.2.15 coincide con las definiciones de espacios de Triebel-Lizorkin $\dot{F}_{p,q}^s$ y $F_{p,q}^s$ dadas en [22]. Al igual que en la sección 5 de [22] se puede probar que

$$\|f\|_{F_{p,q}^{\alpha}(w)} \approx \|f\|_{L^p(w)} + \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^{\alpha}(w)}$$

cuando $\alpha > 0,\ 1 \leq p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Existe en la literatura caracterizaciones de espacios de Triebel-Lizorkin para ondículas con suficiente regularidad y decaymiento y distintos tipos de pesos. Todas ellas producen resultados del tipo:

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(w)} \approx \Big\| \Big[\sum_{l=1}^{L} \sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{2}} |\langle f, \psi_Q^l\rangle| \chi_Q(\cdot))^q \Big]^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(w)} \tag{1.62}$$

para $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$ y w apropiado, donde $\{\psi^l : l = 1, 2, \ldots, L\}$ es una familia de ondículas de regularidad apropiada (ver detalles en la subsección 4.4.1). Las referencias para estos resultados son J. García-Cuerva y J. Martell ([26]) para el caso $H^p(w)$, M. Izuki e Y. Sawano ([36]) para el caso no homogéneo y M. Bownik y K.-P. Ho ([7]) para el caso homogéneo.

En la subsección 4.4.2 probamos resultados del tipo siguiente (ver Teorema 4.4.9):

Teorema 1.2.16. *Sean* $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$ *y* $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Entonces*

$$h_l(N; \mathcal{W}, F^s_{p,q}(w)) \approx h_r(N; \mathcal{W}, F^s_{p,q}(w)) \approx N^{\frac{1}{p}}$$

donde w *es una base de ondículas de regularidad y decaimiento apropiada dependiendo de los parámetros* s, p *y* q.

Como corolario de estos resultados y las caracterizaciones probadas en el capítulo 3 se deduce el siguiente resultado no conocido de interpolación.

Corolario 1.2.17. *(Ver Corolario 4.4.18) Sean* $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty,\ \gamma > 0,\ \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}$ *y* $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Para todo* $0 < \theta < 1$ *sea* τ_θ *dado por* $\frac{1}{\tau_\theta} = \frac{\gamma\theta}{d} + \frac{1}{p}$. *Entonces*

$$(F^s_{p,q}(w), B^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}))_{\theta,\tau_\theta} = B^{s+\gamma\theta}_{\tau_\theta,\tau_\theta}(w^{\frac{\tau_\theta}{p}}).$$

En la sección 4.5, consideramos **las clases de Orlicz con peso** $L^\Phi(w)$ en $\mathbb{R}^d$. Nuestro resultado principal en esta sección prueba que una base de ondículas es democrática (y por consiguiente, avariciosa) en los espacios de Orlicz con peso $L^\Phi(w)$ si y sólo si $L^\Phi(w) = L^p(w)$, con $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$ para algún $p \in (1, \infty)$ y calculamos (salvo constantes multiplicativas) las funciones de democracia $h_r(N; \mathcal{B}, L^\Phi(w))$ y $h_l(N; \mathcal{B}, L^\Phi(w))$ de estas bases en los espacios $L^\Phi(w)$ en términos de su función fundamental. Para comprender el resultado obtenido necesitamos explicar la notación que hemos usado. Comenzamos recordando la definición de espacios de Orlicz con peso.

Una función de Young es una función convexa no decreciente $\Phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\lim_{t \longrightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$. En este trabajo supondremos que $\Phi(0) = 0$, que Φ es estrictamente creciente y finita en todo punto, de modo que es una biyección continua de $[0, \infty)$. Dada una función Φ así definida, y un peso $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$, el espacio de Orlicz con peso $L^\Phi(w)$ es la clase de todas funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big) \in L^1(w)$ para algún $\lambda > 0$. El espacio $L^\Phi(w)$ es un espacio de Banach invariante por reordenamiento cuando está dotado de la correspondiente norma de Luxemburg

$$\|f\|_{L^\Phi(w)} = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big) w(x)dx \leq 1\Big\} \tag{1.63}$$

Se tiene que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible

$$\|\chi_E\|_{L^\Phi(w)} = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{w(E)})}. \tag{1.64}$$

La función $\varphi(t) = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})},\ 0 < t < \infty$ satisface $\varphi(t) = \|\chi_E\|_{L^\Phi(w)}$ para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$ tal que $w(E) = t$ y se llama **función fundamental** de $L^\Phi(w)$.

Los índices de Boyd de los espacios de Orlicz con peso $L^\Phi(w)$ se pueden calcular directamente de la función de Young Φ o de la función fundamental φ. Sean

$$h_\varphi^+(t) = \sup_{s>0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)}, \quad 0 < t < \infty, \tag{1.65}$$

y

$$h_\varphi^-(t) = \operatorname*{inf}_{s>0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)}, \quad 0 < t < \infty. \tag{1.66}$$

Entonces los índices de Boyd inferior y superior, i_φ y I_φ de $L^\Phi(w)$ son dados por

$$i_\varphi = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} \tag{1.67}$$

y

$$I_\varphi = \lim_{t\longrightarrow \infty} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} \tag{1.68}$$

respectivamente.

En este trabajo se prueba el siguiente resultado (ver Teorema 4.5.14) incluido en [53]:

Teorema 1.2.18. *Sean $L^\Phi(w)$ un espacio de Orlicz con peso con los índices de Boyd que satisfacen $0 < i_\varphi \leq I_\varphi < 1$ y $w \in A_{p^\Phi}(\mathbb{R}^d)$, donde $p^\Phi = \frac{1}{I_\varphi}$. Sea $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ una base de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$. Entonces*

$$h_l(N; \mathcal{W}, L^\Phi(w)) \approx h_\varphi^-(N), \qquad h_r(N; \mathcal{W}, L^\Phi(w)) \approx h_\varphi^+(N). \tag{1.69}$$

El resultado también es cierto para la base de Haar.

En el caso particular en el que $\Phi(t) = t^p,\ 1 < p < \infty,\ w \in A_p(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{W}$ es una base de ondículas de regularidad $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$, tenemos $L^\Phi(w) = L^p(w)$ y $h_\varphi^+(t) = h_\varphi^-(t) = t^{\frac{1}{p}}$, y por lo tanto $\mathcal{W}$ es democrática en estos espacios. El caso $w \equiv 1$ del Teorema 1.2.18 aparece en [29].

Usando el resultado del Teorema 1.2.18 y aplicando el Teorema 1.2.2 obtenemos las siguientes inclusiones para las clases avariciosas $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^\Phi(w))$ y los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^\Phi(w))$ (ver Teorema 4.5.19)

Corolario 1.2.19. *Sean $L^\Phi(w)$ un espacio de Orlicz con peso con los índices de Boyd que satisfacen $0 < i_\varphi \leq I_\varphi < 1$, $w \in A_{p^\Phi}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ una base de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$. Entonces tenemos*

$$\begin{aligned} \ell^q_{k^\alpha h_\varphi^+(k)}(\mathcal{W}, L^\Phi(w)) &\hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^\Phi(w)) \\ &\hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_\varphi^-(k)}(\mathcal{W}, L^\Phi(w)). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Estas inclusiones son las mejores, en la escala de los espacios de Lorentz discretos con peso $\ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{W}, L^\Phi(w))$.

En algunos casos los espacios $\ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{W}, L^\Phi(w))$ se pueden caracterizar como un espacio de Besov con regularidad generalizada $\dot{B}^\Psi_{p,q}$ (ver [29]).

En la sección 4.6 consideramos los espacios de **oscilación média acotada**, $BMO(\mathbb{R}^d)$ y calculamos las funciones de democracia $h_l(N;\mathcal{B}, BMO(\mathbb{R}))$ y $h_r(N;\mathcal{B}, BMO(\mathbb{R}))$, salvo constantes multiplicativas, de estos espacios cuando $\mathcal{B}$ es una base de ondículas con suficiente regularidad y suavidad.

Definición 1.2.20. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^d$. Diremos que f es de oscilación média acotada, esto es, $f \in$ **BMO**($\mathbb{R}^d$), si*

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^d)} = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty \tag{1.71}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \in \mathbb{R}^d$ y $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$ denota la media de f sobre el cubo Q.

En el año 1982 P. Wojstaszczyk probó que el sistema de Franklin $\mathfrak{F} = \{f_I\}_{I\in\mathcal{D}} \subset L^2(\mathbb{R})$ (ver [33] para la construcción de la base de ondículas de Franklin en $\mathbb{R}$) es una base incondicional para $BMO(\mathbb{R})$ y que

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R})} \approx \sup_{I\in\mathcal{D}} \Big(\frac{1}{|I|}\sum_{J\subset I} |\langle f, f_I\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.72}$$

La equivalencia (1.72) también existe en várias dimensiones (ver por ejemplo [24, 35] para más detalles).

El resultado siguiente es esencialmente conocido (ver [55]), pero en la subsección 4.6.2 se da una demostración autocontenida (ver Teorema 4.6.6).

Teorema 1.2.21. *Sean $BMO(\mathbb{R})$ el espacio de oscilación média acotada y $\mathcal{W} = \{\psi_I : I \in \mathcal{D}\}$ una base de ondículas de Franklin. Entonces si $N = 1, 2, 3, \ldots$*

$$h_r(N;\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R})) \approx \sqrt{\log N} \quad y \quad h_l(N;\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R})) = 1. \tag{1.73}$$

El resultado del Teorema 1.2.21 es cierto para cualquier base de ondículas que produzca una caracterización de BMO como (1.72).

Como corolario del Teorema 1.2.2 y usando el Teorema 1.2.21 obtenemos las inclusiones para los espacios de aproximación y las clases avariciosas de $BMO(\mathbb{R})$ (ver Teorema 4.6.10).

Corolario 1.2.22. *Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$. Sea $\mathcal{W} = \{\psi_I : I \in \mathcal{D}\}$ una base de ondículas que satisface la equivalencia (1.72). Tenemos*

$$\begin{aligned}&\ell^q_{k^\alpha\sqrt{\log k}}(\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R})) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R})) \hookrightarrow \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R}))\\ &\hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha}(\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R})) = \ell^{\frac{1}{\alpha},q}(\mathcal{W}, BMO(\mathbb{R})).\end{aligned} \tag{1.74}$$

En la sección 4.7 calculamos, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia $h_r(N; \mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d))$ y $h_l(N; \mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d))$ para los **espacios de Lorentz** $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ en términos de los exponentes p y q, cuando $\mathcal{W}$ es una base de ondículas con suficiente regularidad.

Definición 1.2.23. *Para $0 < p, q \leq \infty$, el espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ es el conjunto de todas las funciones medibles f definidas en $\mathbb{R}^d$, tal que*

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & si\ 0 < q < \infty, \\ \sup_{0<t<\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & si\ q = \infty, \end{cases} \tag{1.75}$$

es finita, donde f^* es el reordenamiento no creciente de f (ver Definición 4.7.2).

Para $0 < p, q < \infty$, se tiene la siguiente expresión equivalente al funcional (1.75) (ver por ejemplo Proposición 2.2.5 en [10]).

$$\|f\|_{p,q} = \left(q\int_0^\infty t^q \mu_f(t)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.76}$$

donde μ_f es la función de distribución asociada a f (ver Definición 4.7.1).

Aunque en general la expresión en (1.76) no es una norma los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ son de Banach con una norma equivalente a $\|\cdot\|_{p,q}$ si $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, o bien si $p = q = 1$ (Véase [3, 71] para más información sobre estos espacios). Cuando $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$ los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ son espacios de Banach separables invariantes por reordenamiento.

En la subsección 4.7.2 se prueba el siguiente resultado publicado en [32]:

Teorema 1.2.24. *(ver Teorema 4.7.14) Para $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, sea $\mathcal{W} = \{\psi^l_Q : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ una base de ondículas pertenecientes a la clase de regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$. Entonces*

$$h_l(N; \mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{\text{máx}(p,q)}}, \qquad h_r(N; \mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{\text{mín}(p,q)}}. \tag{1.77}$$

El resultado es cierto para el sistema de Haar.

Como corolario del Teorema 1.2.2, obtenemos las siguientes inclusiones para los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d))$ y las clases avariciosas $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d))$.

Corolario 1.2.25. *(Ver Corolario 4.7.19) Sean* $1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty$ *y* $0 < r \leq \infty$. *Para* $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_0 < \infty$ *tal que* $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\alpha_0}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ *y* $\frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$ *se tiene*

$$\dot{B}^{\alpha_0}_{\tau_0,\tau_0} \hookrightarrow \mathscr{G}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow \mathcal{A}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow \dot{B}^{\alpha_1}_{\tau_1,\tau_1}$$

para cualquier base de ondículas $\mathcal{W}$ *de la clase de regularidad* $\mathcal{R}^{r,M}$ *con* $r > \alpha_0$ *y* $M > d + \alpha_0$.

En la sección 4.8 obtenemos, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia $h_r(N; \mathcal{W}, \Lambda^q(w))$ y $h_l(N; \mathcal{W}, \Lambda^q(w))$ para los espacios de **Lorentz generales** $\Lambda^q(w)$ cuando $\mathcal{W}$ es una base de ondículas perteneciente a la clase de regularidad $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$.

Sea w un peso en $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Dada una función medible, $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow (0, \infty)$ para $0 < q < \infty$ definimos

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} = \Big(\int_0^\infty (f^*(t))^q w(t) dt \Big)^{\frac{1}{q}} \tag{1.78}$$

donde f^* es el reordenamiento no creciente de f (ver definición 4.7.2). El espacio de Lorentz $\Lambda^q(w)$ es la clase de funciones medibles en $\mathbb{R}^d$ tales que la cantidad (1.78) es finita.

Asociado con w definimos

$$W(r) = \int_0^r w(s) ds, \quad 0 \leq r < \infty. \tag{1.79}$$

Los espacios de Lorentz $\Lambda^q(w)$ son espacios cuasi-Banach si y sólo si W es doblante, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $W(2r) \leq CW(r)$, para todo $r > 0$ (ver [10] y sección 4.8). Cuando W es doblante usamos la notación $W \in \Delta_2$.

Cuando $w(t) = (\frac{q}{p}) t^{\frac{q}{p}-1},\ 0 < p, q < \infty$, estos espacios coinciden con los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ y $W(r) = r^{\frac{q}{p}},\ r > 0$ (ver ejemplo 4.8.20).

Cuando $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1} \log(e + t)^{\beta q},\ 0 < p, q < \infty,\ \beta \in \mathbb{R}$, los espacios $\Lambda^q(w)$ coinciden con los espacios de Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^\beta$ (ver ejemplo 4.8.21).

Cuando w es decreciente y $1 \leq q < \infty$, se puede probar (ver [10, 64]) que los espacios $\Lambda^q(w)$ son espacios de Banach. Además, en los mismos trabajos, se prueba que la condición $w \in B_{q,\infty},\ 1 \leq q < \infty$ (ver sección 4.8 para más detalles o el Teorema 2.5.2 en [10]) es necesaria y suficiente para que estos espacios sean de Banach.

Usando un resultado de Soardi ([69]) sobre bases de ondículas en espacios de Banach invariantes por reordenamiento, se puede obtener una caracterización de los espacios $\Lambda^q(w)$ usando coeficientes de ondículas y en particular probar que las bases de ondículas son bases incondicionales para $\Lambda^q(w)$, $1 \leq q < \infty$, $w \in B_{q,\infty}$ (ver sección 4.8 para más detalles).

Proposición 1.2.26. *(Ver Proposición 4.8.19) Sean* $1 \leq q < \infty$, $w \geq 0$ *un peso en* $(0,\infty)$ *tal que* $0 < i_W \leq I_W < q$ *con* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$. *Sea* $\{\psi^l : l : 1, 2, \ldots, L\}$ *un sistema de ondículas con regularidad* $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$ *(ver Definición 4.1.2). Entonces,* $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ *es una base incondicional de* $\Lambda^q(w)$ *y*

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} \approx \|S_\psi(f)\|_{\Lambda^q(w)} \tag{1.80}$$

donde

$$S_\psi(f)(x) = \Big(\sum_{l=1}^{L} \sum_{Q \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_Q^l\rangle|^2 |Q|^{-1} \chi_Q(x)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.81}$$

Los índices de Boyd $\alpha_{\Lambda^q(w)}$ y $\beta_{\Lambda^q(w)}$ de los espacios de Lorentz $\Lambda^q(w)$ se pueden calcular con los exponentes de dilatación de W. Sean

$$h_W^+(t) = \sup_{0<s<\infty} \frac{W(st)}{W(s)},\ 0 < t < \infty$$

y

$$h_W^-(t) = \inf_{0<s<\infty} \frac{W(st)}{W(s)},\ 0 < t < \infty.$$

Si $h_W^+(t)$ es finita en casi todo punto los **exponentes de dilatación inferior** y **superior** de W se definen por

$$i_W = \lim_{t\to 0} \frac{\log h_W^+(t)}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_W^+(t)}{\log t}$$

y

$$I_W = \lim_{t\to \infty} \frac{\log h_W^+(t)}{\log t} = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_W^+(t)}{\log t}.$$

Se tiene que (ver Corolario 4.8.17),

$$\alpha_{\Lambda^q(w)} = \frac{1}{q} \cdot i_W \quad y \quad \beta_{\Lambda^q(w)} = \frac{1}{q} \cdot I_W,\ 0 < q < \infty$$

donde $\alpha_{\Lambda^q(w)}$ y $\beta_{\Lambda^q(w)}$ son los índices de Boyd de $\Lambda^q(w)$.

Por ejemplo, cuando $w(t) = t^\alpha(\log(e+t))^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ se tiene $i_W = I_W = \alpha$ (ver Ejemplos 4.8.9 y 4.8.10).

Definición 1.2.27. *Sea $W \geq 0$ definida en $(0, \infty)$ y creciente.*
*(a) Decimos que W es **fuertemente creciente** si existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{W(t_1)}{t_1} \leq C \frac{W(t_2)}{t_2} \quad \forall\, 0 < t_1 \leq t_2 < \infty.$$

*(b) Decimos que W es **débilmente creciente** si existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{W(t_1)}{t_1} \geq C \frac{W(t_2)}{t_2} \quad \forall\, 0 < t_1 \leq t_2 < \infty.$$

Por ejemplo, para $w(t) = t^{\alpha-1}(\log(e+t))^{\beta},\ \alpha > 0,\ \beta \geq 0$, $W(t) \approx t^{\alpha}(\log(e+t))^{\beta}$ y es fuertemente creciente si y sólo si $\alpha \geq 1$ y débilmente creciente si y sólo si $\alpha < 1$. En el caso de $w(t) = t^{\alpha-1}(\log(e+t))^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $W(t) \approx t^{\alpha}(\log(e+t))^{\beta}$ y W es fuertemente creciente si y sólo si $\alpha > 1$ y débilmente creciente si y sólo si $\alpha \leq 1$. En general si w es creciente, W es convexa y por tanto fuertemente creciente y si w es decreciente W es cóncava, por tanto débilmente creciente.

En la subsección 4.8.2 probamos el siguiente resultado (ver Teorema 4.8.30):

Teorema 1.2.28. *Sean $1 \leq q < \infty$ y $w > 0$ un peso en $(0, \infty)$ tal que $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$ con $0 < i_W \leq I_W < q$. Sea $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ una base de ondículas con regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$. Entonces,*
(a) Si W es fuertemente creciente

$$N^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N; \mathcal{W}, \Lambda^q(w)) \leq h_r(N; \mathcal{W}, \Lambda^q(w)) \approx [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}}.$$

(b) Si W es débilmente creciente

$$[h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N; \mathcal{W}, \Lambda^q(w)) \leq h_r(N; \mathcal{W}, \Lambda^q(w)) \approx N^{\frac{1}{q}}.$$

No conocemos un resultado que se pueda aplicar a todo peso w.

En el capítulo 5 se estudian propiedades adicionales de las clases avariciosas y los espacios de aproximación. Los resultados que se incluyen aquí aparecen en [28]. En primer lugar mostramos con un ejemplo que las clases avariciosas no tienen que ser necesariamente espacios lineales. Ver sección 5.1. En la sección 5.2 estudiamos las funciones de democracia $h_l(N; \mathcal{A}_q^{\alpha})$, $h_r(N; \mathcal{A}_q^{\alpha})$, $h_l(N; \mathscr{G}_q^{\alpha})$ y $h_r(N; \mathscr{G}_q^{\alpha})$ de una base incondicional $\mathcal{B}$ de un espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$ en espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^{\alpha}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ y en las clases de avariciosas $\mathscr{G}_q^{\alpha}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ respectivamente, en función de las funciones de democracia de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{X}$ (recordar la definición de las funciones de democracia dadas en (1.38) y (1.39)).

Recordamos que las definiciones de los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^{\alpha}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ y de clases avariciosas $\mathscr{G}_q^{\alpha}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ fueron dadas en (1.40) (ver definición 1.2.1) y (1.42) respectivamente. Se demuestran los siguientes resultados.

Teorema 1.2.29. *(Ver Teorema 5.2.1) Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \le \infty$ fijos. Sea $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ y supongamos que $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es doblante. Entonces, tenemos*

$$a)\ h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$$

$$b)\ h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

En particular $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ si y sólo si $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathbb{X}$.

Teorema 1.2.30. *(Ver Teorema 5.2.3) Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \le \infty$ fijos. Sea $\mathcal{B}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ y supongamos que $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es doblante. Entonces,*

$$a)\ h_l(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$$

$$b)\ h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \lesssim N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

En particular, si $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathbb{X}$ entonces es democrática en $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

Observar que la parte b) del Teorema 1.2.30 no es una igualdad. En la sección 5.2 mostramos con el ejemplo $\mathbb{X} = BMO$ que no siempre se tiene la igualdad. Por otro lado, si $\mathcal{B}$ tiene la **Propiedad** (H) se tiene la igualdad.

Definición 1.2.31. *Sea $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Decimos que $\mathcal{B}$ satisface la **Propiedad (H)** si para cada $n = 1, 2, \ldots$ existe $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = 2^n$ que satisface la propiedad*

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathbb{X}} \approx h_r(2^{n-1};\mathcal{B},\mathbb{X}), \quad \forall\ \Gamma' \subset \Gamma_n \ \textit{com}\ |\Gamma'| = 2^{n-1}.$$

Proposición 1.2.32. *(Ver Proposición 5.3.2) Sea $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Supongamos que $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (H). Entonces, para todo $\alpha > 0$, $0 < q \le \infty$ se tiene*

$$h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

En la sección 5.3 se prueba que las bases de ondículas con regularidad y decaimiento adecuados tienen la propiedad (H) en los espacios de Orlicz $L^\Phi(\mathbb{R}^d)$ con los índices de Boyd en $(0,1)$, en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$ y en los espacios de Besov generalizados con peso. Por el momento sólo sabemos que falle la propiedad (H) en el caso $BMO(\mathbb{R}^d)$.

Ya hemos mencionado que cuando $\mathcal{B}$ es una base incondicional y democrática en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ se tiene $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) = \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ con las cuasi-normas equivalentes. En la sección 5.4, probamos que la inclusión continua $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ falla cuando la diferencia entre las funciones $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ y $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es por lo menos logarítmica (e incluso menos que eso). Probamos el siguiente resultado que puede aplicarse a las bases de ondículas en los espacios $L^p(\log L)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\ 1<p<\infty$, en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d),\ 1<p<\infty,\ 1\le q<\infty$ y en los espacios de Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\ 1\le p<\infty,\ 1\le q<\infty$.

Proposición 1.2.33. *Sea $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ y $\alpha > 0$. Supongamos que existen enteros $p_N \ge q_N \ge 1,\ N = 1,2,\dots$ tales que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{p_N}{q_N} = \infty \quad y \quad \frac{h_r(q_N)}{h_l(p_N)} \gtrsim \Big(\frac{p_N}{q_N}\Big)^\alpha.$$

Entonces la inclusión continua $\mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ no es cierta para cualquier $\tau\in(0,\infty]$.

Finalmente en la sección 5.5 probamos el Teorema 1.2.4 sustituyendo la condición $\eta\in\mathbb{W}_+$ por la Propiedad (H) y $\eta\in\mathbb{W}$.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos matemáticos básicos para la lectura y comprensión de esta tesis y brindar las definiciones y propiedades relacionadas con ellos que posteriormente usaremos en este trabajo. Se indica la bibliografía consultada a fin de que el lector interesado pueda acceder a ella.

2.1. Esquema de aproximación

Sea $\mathbb{X}$ un conjunto en el que ocurre la aproximación. Tomamos el punto de vista presentado por R.A. DeVore y V.A. Popov en [18] y consideraremos que $\mathbb{X}$ sea lo más general posible, en particular no supondremos que $\mathbb{X}$ sea lineal o normado. En cambio, vamos a pedir que $\mathbb{X}$ sea sólo un grupo Abeliano cuasi-normado (ver [57] o [4]). Es decir, $\mathbb{X}$ es un grupo con una operación de adición, un elemento neutro denotado por $\mathbf{0}$ y una aplicación $x \in \mathbb{X} \mapsto \|x\|_{\mathbb{X}} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}&(i)\ \|\mathbf{0}\|_{\mathbb{X}} = 0,\\ &ii)\ \|-x\|_{\mathbb{X}} = \|x\|_{\mathbb{X}},\\ &iii)\ \text{ existe } \mu \leq 1 \text{ tal que } \forall\ x, y \in \mathbb{X}\\ &\|x+y\|_{\mathbb{X}}^{\mu} \leq \|x\|_{\mathbb{X}}^{\mu} + \|y\|_{\mathbb{X}}^{\mu},\end{aligned} \tag{2.1}$$

con μ suficientemente pequeño.

Tomando $y = -x$ en $iii)$ se tiene que $\|x\|_{\mathbb{X}} \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{X}$. Es posible que pueda haber otros elementos $x \neq 0$ tales que $\|x\|_{\mathbb{X}} = 0$. La propiedad $iii)$ es equivalente a que existe $C \geq 1$ tal que

$$iv)\ \|x+y\|_{\mathbb{X}} \leq C(\|x\|_{\mathbb{X}} + \|y\|_{\mathbb{X}}), \tag{2.2}$$

(ver por ejemplo [4]). Un esquema de aproximación es una sucesión de subespacios

$\Sigma_N \subset \mathbb{X}$ tales que

$i)$ $\Sigma_0 = \{0\}$
$ii)$ $0 \in \Sigma_N,\ N = 0, 1, 2, \ldots,$
$iii)$ $\Sigma_N \subset \Sigma_{N+1},\ N = 0, 1, 2, \ldots,$
$iv)$ $a\Sigma_N = \Sigma_N,\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$v)$ $\Sigma_N \pm \Sigma_M \subset \Sigma_{C(N+M)}, N, M = 0, 1, 2, \ldots,$ *y C es una constante absoluta.*
$vi)$ $\bigcup_N \Sigma_N$ *es densa en* $\mathbb{X}$ (2.3)

Para cada $x \in \mathbb{X}$, denotamos el error de aproximación de x por los elementos de Σ_N por:

$$\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} := \sigma_N(x, \Sigma_N)_{\mathbb{X}} := \inf_{y \in \Sigma_N} \|x - y\|_{\mathbb{X}} := dist(x, \Sigma_N). \tag{2.4}$$

Observamos en particular que $\sigma_0(x)_{\mathbb{X}} = \|x\|_{\mathbb{X}}$. De las propiedades $iii)$ y $vi)$ se concluye que la sucesión $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}$ es monótona decreciente y $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} \downarrow 0$. La aproximación es lineal cuando los subespacios Σ_N son lineales y es no lineal, si son no lineales.

2.2. Espacios de aproximación

Uno de los propósitos de la teoría de aproximación es la caracterización de los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha := \mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$.

Definición 2.2.1. *Para cada $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$, los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$ se definen como el conjunto de todos los elementos $x \in \mathbb{X}$ tales que*

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X},\Sigma_N)} := \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left(\sum_{N=1}^{\infty} [N^\alpha \sigma_N(x)_{\mathbb{X}}]^q \frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N \geq 1} N^\alpha \sigma_N(x)_{\mathbb{X}}, & q = \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

es finita.

La cantidad (2.5) es una cuasi-norma para los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$, y una norma si el espacio $\mathbb{X}$ es un espacio normado, Σ_N son espacios lineales y $1 \leq q \leq \infty$. (véase por ejemplo [63, 17]). Los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$ decrecen con α y para α fijo crecen con q. Es decir, se tiene las siguientes inclusiones continuas:

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N) \hookrightarrow \mathcal{A}_{q_1}^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N), \quad si \quad \alpha > \beta \quad o \quad si \quad \alpha = \beta \quad y \quad q \leq q_1 \tag{2.6}$$

Puesto que $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}$ es decreciente, se puede obtener una cuasi-norma equivalente en los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$ restringiendo la suma en (2.5) a los números diádicos. Es decir, si $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X},\Sigma_N)} \approx \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k\alpha}\sigma_{2^k}(x)_{\mathbb{X}})^q\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{k=0,1,2\dots} 2^{k\alpha}\sigma_{2^k}(x)_{\mathbb{X}}, & q = \infty. \end{cases} \tag{2.7}$$

(véase por ejemplo [17, 18, 63]).

La búsqueda de una caracterización para los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$ se simplifica estableciendo las llamadas desigualdades de tipo Jackson y Bernstein o teoremas directo e inverso de aproximación, respectivamente.

Definición 2.2.2. *Dado un número $r > 0$, sea $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_r$ un subespacio de $\mathbb{X}$ con una cuasi-norma $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}_r}$.*

*(a) Se dice que $\mathbb{Y}$ satisface la **desigualdad de tipo Jackson** con exponente $r > 0$ si*

$$\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} \leq CN^{-r}\|x\|_{\mathbb{Y}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{Y}, \quad \forall\, N = 1, 2, \dots \tag{2.8}$$

*(b) Diremos que $\mathbb{Y}$ satisface la **desigualdad de tipo Bernstein** con exponente $r > 0$ si*

$$\|y\|_{\mathbb{Y}} \leq CN^r\|y\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall\, y \in \Sigma_N, \quad \forall\, N = 1, 2, 3, \dots \tag{2.9}$$

Estas desigualdades permiten llevar a cabo la conexión entre los espacios de aproximación y los espacios de interpolación. En la siguiente sección recordaremos estas conexiones y alguna teoría sobre los espacios de interpolación.

2.3. K-Funcionales y espacios de interpolación

Los espacios de interpolación surgen en el estudio del siguiente problema de análisis: dados dos espacios lineales cuasi-normados $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, para qué espacio lineal cuasi-normado Z es cierto que cada aplicación T, acotada como operador de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}$ y como operador de $\mathbb{Y}$ en $\mathbb{Y}$ es también acotada como operador de Z en Z. Tales espacios Z son llamados *espacios de interpolación* para el par $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y el problema es construir y caracterizar estos espacios. Existen al menos dos métodos para construir espacios de interpolación Z : el método complejo desarrollado por Calderón ([9]) y el método real de Lions y Peetre ([48]). Para nuestros objetivos solo necesitaremos del método real usando el K-funcional de Peetre, que describiremos a continuación. Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ dos espacios lineales incluidos en algún espacio de Hausdorff lineal topológico $\mathfrak{X}$. Entonces se puede formar el espacio $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ que consiste de todas funciones $f = h + g,\ h \in \mathbb{X},\ g \in \mathbb{Y}$. Definimos

$$\|f\|_{\mathbb{X}+\mathbb{Y}} := \inf_{f=h+g}\{\|h\|_{\mathbb{X}} + \|g\|_{\mathbb{Y}}\}. \tag{2.10}$$

Se define el K-funcional para $f \in \mathbb{X}+\mathbb{Y}$ por

$$K(f,t) := K(f,t;\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \inf_{f=h+g}\{\|h\|_{\mathbb{X}} + t\|g\|_{\mathbb{Y}}\}, \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

Nota 2.3.1. *En particular si $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ son dos espacios de Banach, con $\mathbb{Y}$ continuamente incluido en $\mathbb{X}$ ($\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{X}$), el K-funcional de $f \in \mathbb{X}$ se define por*

$$K(f,t) := K(f,t;\mathbb{X},\mathbb{Y}) := \inf_{g\in\mathbb{Y}}\{\|f-g\|_{\mathbb{X}} + t\|g\|_{\mathbb{Y}}\}, \quad t \geq 0. \tag{2.12}$$

En el resultado siguiente se resumen las propiedades fundamentales del K-funcional.

Proposición 2.3.2. *([17]) El K-funcional (2.11) tiene las propiedades siguientes:*
(i) Como función de $t \geq 0$, $K(f,t)$ es creciente, cóncava y continua. Y también es subaditiva, es decir $K(f,t_1+t_2) \leq K(f,t_1)+K(f,t_2)$.
(ii) Si $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ son espacios de Banach, entonces como función de f para cada $t>0$ fijo, $K(f,t)$ es una semi-norma en $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$.
(iii) Si $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ son espacios cuasi-normados, entonces como función de f, para cada $t>0$ fijo, $K(f,t)$ es una cuasi-seminorma para cualquier $f,g \in \mathbb{X}+\mathbb{Y}$:

$$K(f+g,t) \leq C(K(f,t)+K(g,t)). \tag{2.13}$$

Los K-funcionales fueron introducidos como medio de generar espacios de interpolación. Recordamos que si $0<\theta<1$ y $0<q\leq\infty$, el espacio de interpolación $(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}$ se define como el conjunto de todas funciones $f \in \mathbb{X}+\mathbb{Y}$ tales que

$$\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta}K(f,t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta}K(f,t), & q=\infty. \end{cases} \tag{2.14}$$

De la monotonicidad de $K(f,.)$ se puede obtener las siguientes cuasi-normas equivalentes en los espacios de interpolación $(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}$: para cualquier $r>0$

$$\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}} \approx \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^\infty [n^{r\theta}K(f,n^{-r})]^q \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty, \\ \sup_{n\geq 1} n^{r\theta}K(f,n^{-r}), & q=\infty. \end{cases} \tag{2.15}$$

y

$$\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}} \approx \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^\infty [2^{kr\theta}K(f,2^{-kr})]^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty, \\ \sup_{k\geq 0} 2^{kr\theta}K(f,2^{-kr}), & q=\infty. \end{cases} \tag{2.16}$$

donde las constantes de equivalencia son independientes de f (ver [17], pag. 193)

A continuación vamos a recordar algunas propiedades generales de estos espacios. Las siguientes inclusiones continuas son válidas para los espacios $(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}$: Si $\beta<\alpha$, entonces

$$(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\alpha,q}\hookrightarrow(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\beta,q_1},\quad \forall\ 0<q,q_1\leq\infty,$$

y

$$\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\beta,q_1}}\leq C\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\alpha,q}}. \tag{2.17}$$

Si $\alpha=\beta$, entonces $\forall\ 0<q\leq q_1\leq\infty$,

$$(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\alpha,q}\hookrightarrow(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\alpha,q_1}$$

y

$$\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\alpha,q_1}}\leq C\|f\|_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\alpha,q}} \tag{2.18}$$

La inclusión (2.18) se puede probar usando la cuasi-norma equivalente (2.16) y la inclusión continua $\ell^q\hookrightarrow\ell^{q_1},\ 0<q\leq q_1\leq\infty$ (ver [17], p. 193). Para la inclusión (2.17), tenemos

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}[2^{kr\beta}K(f,2^{-kr})]^{q_1}\Big)^{\frac{1}{q_1}} &\leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty}2^{kr(\beta-\alpha)q_1}\Big)^{\frac{1}{q_1}}\sup_{k\geq0}\{2^{k\alpha}K(f,2^{-kr})\}\\ &\leq C\|2^{k\alpha}K(f,2^{-kr})\|_{\ell^q},\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos la inclusión $\ell^{q_1}\hookrightarrow\ell^{\infty}$.

Sean $(\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0)$ e $(\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1)$ dos pares de espacios cuasi-normados. Si $\mathbb{X}_0\hookrightarrow\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{Y}_0\hookrightarrow\mathbb{Y}_1$ son inclusiones continuas para los pares $\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0$ y $\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1$, entonces se tiene la siguiente inclusión continua

$$(\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0)_{\theta,q}\hookrightarrow(\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1)_{\theta,q}$$

y

$$\|f\|_{(\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1)_{\theta,q}}\leq M\|f\|_{(\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0)_{\theta,q}},\quad 0\leq\theta\leq1;\quad 0<q\leq\infty. \tag{2.19}$$

El resultado siguiente (*teorema de reiteración*) prueba que si empezamos con un par de espacios cuasi-normados $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ y generamos espacios de interpolación $(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}$, podemos aplicar la interpolación a un par de espacios $(\mathbb{X},\mathbb{Y})_{\theta,q}$, y lo que obtenemos es simplemente otro espacio de interpolación del par inicial $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Teorema 2.3.3. *([**17**]) Dado un par de espacios cuasi-normados* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, *sean* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\alpha_0,q_0}$ *y* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\alpha_1,q_1}$ *con* $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$ *y* $0 < q_0, q_1 \leq \infty$. *Entonces, para todo* $0 < \theta < 1$ *y* $0 < r \leq \infty$, *tenemos*

$$((\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\alpha_0,q_0}, (\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\alpha_1,q_1})_{\theta,r} = (\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\theta',r}, \quad \theta' := (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1, \tag{2.20}$$

con las cuasi-normas equivalentes.

Comparando las equivalencias (2.16) y (2.7) se puede ver que las definiciones de los espacios de interpolación y de los espacios de aproximación son casi idénticas: se sustituye $\sigma_{2^k}(f)_{\mathbb{X}}$ por $K(f, 2^{-k})$. Por lo tanto, no debería sorprender que uno se pueda caracterizar por el otro. Para eso es necesario, naturalmente, una comparación entre el error de aproximación $\sigma_N(f)$ y el K-funcional. Está claro, que esta comparación solo es posible con una elección adecuada del espacio $\mathbb{Y}$ en la definición de K. ¿ Pero cómo podemos decidir qué espacio $\mathbb{Y}$ es adecuado? Esta es la función de las desigualdades de Jackson y Bernstein (2.8) y (2.9), respectivamente. Siempre que se verifican estas dos desigualdades, el siguiente resultado de R. A. DeVore y G. G. Lorentz ([17]) prueba que se puede obtener una comparación entre $\sigma_N(f)_{\mathbb{X}}$ y $K(f, N^{-r}; \mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Teorema 2.3.4. *(Teorema 5.1, cap. 7 en [17]) Sean* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *dos espacios cuasi-Banach con* $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{X}$ *y* $r > 0$. *Sea* $\{\Sigma_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ *un esquema de aproximación para* $\mathbb{X}$ *definido en la sección 2.1.*
(i) Si $\mathbb{Y}$ *satisface la desigualdad de Jackson (2.8) con exponente* r, *entonces*

$$\sigma_N(f)_{\mathbb{X}} \leq CK(f, N^{-r}; \mathbb{X}, \mathbb{Y}), \quad f \in \mathbb{X}, \ N = 1, 2, \dots \tag{2.21}$$

(ii) Si $\mathbb{Y}$ *verifica la desigualdad de Bernstein (2.9) con exponente* r, *entonces con* $\mu = \mu(\mathbb{Y})$,

$$K(f, N^{-r}; \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq CN^{-r}\Big(\sum_{k=1}^{N}(k^r\sigma_k(f)_{\mathbb{X}})^{\mu}\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{\mu}}, \ f \in \mathbb{X}, \ N = 1, 2, \dots \tag{2.22}$$

donde μ *es el exponente de la* μ*-desigualdad triangular en* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$.

Como consecuencia del teorema anterior se obtiene la siguiente relación entre los espacios de aproximación y los espacios de interpolación.

Teorema 2.3.5. *([**18**], Teorema 3.1) Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *un espacio cuasi-Banach e* $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_r$ *un subespacio de* $\mathbb{X}$. *Si* $\mathbb{Y}$ *satisface las desigualdades de Jackson (2.8) y Bernstein (2.9) con exponente* $r > 0$, *entonces para* $0 < \alpha < r$ *y* $q > 0$, *tenemos*

$$\mathcal{A}_q^{\alpha}(\mathbb{X}, \Sigma_N) = (\mathbb{X}, \mathbb{Y})_{\frac{\alpha}{r},q}. \tag{2.23}$$

Demostración. Sea $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}, \mathbb{Y}_r)_{\frac{\alpha}{r},q}$. Se tiene que $\|f\|_{\mathbb{Z}} = \|f\|_{\theta,q}$ con $\theta = \frac{\alpha}{r} < 1$. De (2.15) y (2.21) se obtiene $\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha_q(\mathbb{X},\Sigma_N)} \leq C\|f\|_{\mathbb{Z}} + \|f\|_{\mathbb{X}}$. Como $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}, \mathbb{Y}_r)_{\theta,q} \hookrightarrow \mathbb{X}$ se deduce que

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha_q(\mathbb{X},\Sigma_N)} \leq C\|f\|_{\mathbb{Z}}. \tag{2.24}$$

Para la desigualdad contraria, sea β fijo tal que $\alpha < \beta < r$. Tenemos $k^{r\mu} = k^{(r-\beta)\mu}k^{\beta\mu}$. Tomando $\mu < q$ y usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{q}{\mu}$ y $\frac{s}{\mu}$ tales que $\frac{\mu}{q} + \frac{\mu}{s} = 1$ en la expresión (2.22) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^N (k^r\sigma_k(f)_{\mathbb{X}})^\mu \frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{\mu}} &= \Big(\sum_{k=1}^N k^{(r-\beta)\mu}k^{\beta\mu}\sigma_k(f)^\mu_{\mathbb{X}}\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq \Big(\sum_{k=1}^N k^{\beta q}\sigma_k(f)^q_{\mathbb{X}}\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{k=1}^N k^{(r-\beta)s}\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq CN^{(r-\beta)}\Big(\sum_{k=1}^N k^{\beta q}\sigma_k(f)^q_{\mathbb{X}}\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Entonces de las desigualdades (2.25) y (2.22) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{N=1}^\infty (N^{r\theta}K(f, N^{-r}))^q \frac{1}{N} \\
&\leq C\sum_{N=1}^\infty N^{\alpha q}N^{-rq}\Big(\sum_{k=1}^N (k^r\sigma_k(f)_{\mathbb{X}})^\mu\frac{1}{k}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\frac{1}{N} \\
&\leq C\sum_{N=1}^\infty N^{(\alpha-\beta)q}\Big(\sum_{k=1}^N k^{\beta q}\sigma_k(f)^q_{\mathbb{X}}\frac{1}{k}\Big)\frac{1}{N} \\
&\leq C\sum_{k=1}^\infty k^{\beta q}\sigma_k(f)^q_{\mathbb{X}}\Big(\sum_{N=k}^\infty N^{(\alpha-\beta)q}\frac{1}{N}\Big)\frac{1}{k} \\
&\leq C\|f\|^q_{\mathcal{A}^\beta_q(\mathbb{X},\Sigma_N)}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

De (2.15) y las desigualdades (2.24) y (2.26) se obtiene el resultado. □

Así, el teorema 2.3.5 resuelve el problema de caracterización de los espacios de aproximación, conociendo los siguientes elementos:
(i) un espacio de funciones apropiado $\mathbb{Y}_r \hookrightarrow \mathbb{X}$ tal que se verifiquen las desigualdades de tipo Jackson y Bernstein con exponente r
(ii) una caracterización de los espacios de interpolación $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}_r)_{\theta,q}$.

Conocer el primer elemento es más difícil desde el punto vista de la aproximación no lineal. El segundo elemento a veces es dado por los resultados clásicos en la teoría de interpolación.

En el resultado siguiente, R. A. DeVore y V. A. Popov ([18]) prueban que los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$ satisfacen las desigualdades de tipo Jackson y Bernstein con exponente $r > 0$.

Lema 2.3.6. *([18]) Para cualquier espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$ y un esquema de aproximación Σ_N, y para cualesquiera $\beta > 0$ y $0 < q \leq \infty$, se satisfacen las desigualdades de Jackson (2.8) y Bernstein (2.9) con exponente $\beta > 0$ para $\mathbb{Y}_\beta = \mathcal{A}_q^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N)$.*

Demostración. Por un lado, de la inclusión $\mathcal{A}_q^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N) \hookrightarrow \mathcal{A}_\infty^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N)$ se tiene

$$N^\beta \sigma_N(f)_{\mathbb{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_\infty^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N)} \leq C\|f\|_{\mathcal{A}_q^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N)},$$

que es la desigualdad de Jackson con exponente $\beta > 0$.

Por el otro lado, si $g \in \Sigma_N$ usando que $\sigma_n(g)_{\mathbb{X}} = 0$ para $n \geq N$ y que $\sigma_n(g)_{\mathbb{X}} \leq \|g\|_{\mathbb{X}}$, para $n = 1, 2, \ldots, N-1$ se tiene

$$\begin{aligned} \|g\|^q_{\mathcal{A}_q^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N)} &= \|g\|_{\mathbb{X}} + \Big(\sum_{n=1}^{N-1} [n^\beta \sigma_n(g)_{\mathbb{X}}]^q \frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \|g\|_{\mathbb{X}} + \|g\|_{\mathbb{X}} \Big(\sum_{n=1}^{N-1} n^{\beta q} \frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq CN^\beta \|g\|_{\mathbb{X}}, \end{aligned}$$

que es la desigualdad de Bernstein con exponente $\beta > 0$.

$\square$

Por lo tanto, por el Teorema 2.3.5 se tiene:

Corolario 2.3.7. *Para cualquier $0 < \alpha < \beta$, $0 < q \leq \infty$ y $0 < s \leq \infty$*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N) = (\mathbb{X}, \mathcal{A}_s^\beta(\mathbb{X}, \Sigma_N))_{\alpha/\beta, q} \tag{2.27}$$

En particular, del teorema de reiteración (ver el teorema 2.3.3) para la interpolación se tiene el resultado siguiente:

Corolario 2.3.8. *([18], Corolario 3.4) Para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $0 < q, q_1, q_2 \leq \infty$ y $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$, con $0 < \theta < 1$, tenemos*

$$(\mathcal{A}_{q_1}^{\alpha_1}(\mathbb{X}, \Sigma_N), \mathcal{A}_{q_2}^{\alpha_2}(\mathbb{X}, \Sigma_N))_{\theta, q} = \mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \Sigma_N)$$

El corolario 2.3.8 prueba que los espacios de aproximación son espacios de interpolación.

2.4. Bases incondicionales y bases reticulares en un espacio cuasi-Banach

Siguiendo el modelo de la definición y propiedades de base incondicional en un espacio de Banach desarrollado en [68] (ver también [33]), en esta sección damos los conceptos de base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ y sus propiedades fundamentales.

Definición 2.4.1. *Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espacio cuasi-Banach. Se dice que una sucesión numerable $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{X}$ es una base para $\mathbb{X}$ si para cada $x \in \mathbb{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e_j$$

con la convergencia en $\mathbb{X}$.

Sea $\mathfrak{N}$ la clase de todos subconjuntos finitos $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}$. Decimos que $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$ converge incondicionalmente a y y escribimos

$$\lim_{\mathcal{N}\in\mathfrak{N}} \sum_{i\in\mathcal{N}} y_i = y \tag{2.28}$$

si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\epsilon) \in \mathfrak{N}$ tal que

$$\Big\| y - \sum_{i\in\mathcal{N}'} y_i \Big\|_{\mathbb{X}} < \epsilon \quad \textit{para todo } \mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}. \tag{2.29}$$

Definición 2.4.2. *Una base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ se dice que es una base incondicional si y sólo si existe una única sucesión de escalares $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e_j$ y la serie converge incondicionalmente.*

Teorema 2.4.3. *(Ver [68] Teorema 16.1 o [33] Teorema 2.10) Una base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ es incondicional si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j c_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}}, \tag{2.30}$$

para toda sucesión de escalares $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $|\beta_j| \leq 1$.

De este teorema se tiene que si $\mathcal{B}$ es incondicional, para todo conjunto finito $\Gamma \subset \mathbb{N}$

$$\frac{1}{C}(\inf_{j\in\Gamma} |c_j|) \Big\| \sum_{j\in\Gamma} e_j \Big\|_{\mathbb{X}} \leq \Big\| \sum_{j\in\Gamma} c_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C(\sup_{j\in\Gamma} |c_j|) \Big\| \sum_{j\in\Gamma} e_j \Big\|_{\mathbb{X}}. \tag{2.31}$$

Definición 2.4.4. *Una colección* $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ *en un espacio cuasi-Banach* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, *se dice que verifica la* ***propiedad reticular*** *si dadas las sucesiones* $\{c_k\}, \{s_k\}$ *tales que* $|c_k| \leq |s_k|$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *si* $x = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e_k \in \mathbb{X}$ *se tiene que* $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \mathbb{X}$ *e* $\|y\|_{\mathbb{X}} \leq \|x\|_{\mathbb{X}}$.

Nota 2.4.5. *Del Teorema 2.4.3 se ve claramente que toda base que verifica la propiedad reticular es incondicional con* $C = 1$. *Además, una base es reticular si y sólo si se verifica (2.31) con* $C = 1$.

Si $\mathcal{B}$ es una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ se puede definir una cuasi-norma $|||\cdot|||$ en $\mathbb{X}$ equivalente a $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ con respecto a la cual la base $\mathcal{B}$ es reticular.

Definición 2.4.6. *Sea* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *un espacio cuasi-Banach y* $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una base para* $\mathbb{X}$. *Para* $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \in \mathbb{X}$ *definimos*

$$|||x|||_{\mathbb{X}} = \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j c_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}}. \tag{2.32}$$

Proposición 2.4.7. *Sea* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *un espacio cuasi-Banach y* $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una base incondicional para* $\mathbb{X}$. *Se tiene:*

(i) $|||\cdot|||_{\mathbb{X}}$ *es una cuasi-norma en* $\mathbb{X}$ *equivalente a* $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$.

(ii) Para todo $\Gamma \subset \mathbb{N}$ *finito*

$$(\inf_{j\in\Gamma} |c_j|)\, |||\sum_{j\in\Gamma} e_j|||_{\mathbb{X}} \leq |||\sum_{j\in\Gamma} c_j e_j|||_{\mathbb{X}} \leq (\max_{j\in\Gamma} |c_j|)\, |||\sum_{j\in\Gamma} e_j\, |||_{\mathbb{X}}\, .$$

(iii) $\mathcal{B}$ *es una base reticular en* $(\mathbb{X}, |||\cdot|||_{\mathbb{X}})$.

Demostración. (i) Si $|||x|||_{\mathbb{X}} = 0$, $\Big\| \sum_{j\in\Gamma} c_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}} = 0\ \forall\, \Gamma \subset \mathbb{N}$, entonces $c_j = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|||\lambda x|||_{\mathbb{X}} = |\lambda|\, |||x|||_{\mathbb{X}}$ por ser $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ una cuasi-norma. La cuasi-desigualdad triangular se sigue de la cuasi-desigualdad triangular de $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Sea $0 < \rho \leq 1$ el exponente de la ρ-desigualdad triangular en $\mathbb{X}$; entonces tenemos

$$\begin{aligned} |||x + y|||_{\mathbb{X}}^{\rho} &= \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \Big(\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j x_j e_j + \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j y_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}}^{\rho} \Big) \\ &\leq \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \Big(\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j x_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}}^{\rho} + \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j y_j e_j \Big\|_{\mathbb{X}}^{\rho} \Big) \\ &= |||x\, |||_{\mathbb{X}}^{\rho} + |||\, y\, |||_{\mathbb{X}}^{\rho}\, . \end{aligned}$$

Probamos que son equivalentes. Como $\mathcal{B}$ es incondicional, $|||x|||_{\mathbb{X}} \leq C\|x\|_{\mathbb{X}}$. Además, $|||x|||_{\mathbb{X}} \geq \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right\|_{\mathbb{X}}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ de donde se deduce $|||x|||_{\mathbb{X}} \geq \|x\|_{\mathbb{X}}$.

(ii) Tenemos, para $M = \text{máx}_{j\in\Gamma} |c_j|$,

$$\begin{aligned} |||\sum_{j\in\Gamma} c_j e_j|||_{\mathbb{X}} &= M \sup_{\substack{\Gamma'\subset\Gamma \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma'} \lambda_j \frac{c_j}{M} e_j \right\|_{\mathbb{X}} \leq M \sup_{\substack{\Gamma'\subset\Gamma \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma'} \lambda_j e_j \right\|_{\mathbb{X}} \\ &= M\, |||\sum_{j\in\Gamma'} e_j\, |||_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

De manera similar, para $m = \text{ínf}_{j\in\Gamma} |c_j|,\ m > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} m\, |||\sum_{j\in\Gamma} e_j|||_{\mathbb{X}} &= m \sup_{\substack{\Gamma'\subset\Gamma \\ |\eta_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma'} \eta_j e_j \right\|_{\mathbb{X}} = \sup_{\substack{\Gamma'\subset\Gamma \\ |\eta_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma'} \frac{m}{c_j} \eta_j c_j e_j \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sup_{\substack{\Gamma'\subset\Gamma \\ |\eta_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma'} \eta_j c_j e_j \right\|_{\mathbb{X}} = |||\sum_{j\in\Gamma} c_j e_j\, |||_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

(iii) Sea $|c_j| \leq |s_j|$ con $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j e_j \in \mathbb{X}$. Podemos suponer que $c_j > 0$ porque

$$\begin{aligned} |||\sum_{j\in\Gamma} c_j e_j|||_{\mathbb{X}} &= \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j c_j e_j \right\|_{\mathbb{X}} = \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j sig(c_j)|c_j| e_j \right\|_{\mathbb{X}} \\ &= \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\eta_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma} \eta_j |c_j| e_j \right\|_{\mathbb{X}} = |||\sum_{j\in\Gamma} |c_j| e_j\, |||_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |||\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e_j|||_{\mathbb{X}} &= \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j |c_j| e_j \right\|_{\mathbb{X}} = \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j \frac{|c_j|}{|s_j|} |s_j| e_j \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sup_{\substack{\Gamma finito \\ |\lambda_j|\leq 1}} \left\| \sum_{j\in\Gamma} \lambda_j |s_j| e_j \right\|_{\mathbb{X}} = |||\sum_{j=1}^{\infty} s_j e_j\, |||_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

□

2.5. Propiedades generales de las funciones de democracia

En esta sección recordamos los conceptos de funciones de democracia por la izquierda y por la derecha, introducidos inicialmente por S.J. Dilworth, N.J. Kalton, D.Kutzarova y V.N. Temlyakov en [20] (ver también [39, 29]) y probamos algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición 2.5.1. *Dada una colección $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ en un espacio cuasi-normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, las funciones de democracia de $\mathcal{B}$ por la derecha y por la izquierda, $h_r(N; \mathcal{B}, \mathbb{X})$ y $h_l(N; \mathcal{B}, \mathbb{X})$, respectivamente, se definen por*

$$h_r(N; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \equiv \sup_{|\Gamma|=N} \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \tag{2.33}$$

y

$$h_l(N; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \equiv \inf_{|\Gamma|=N} \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}. \tag{2.34}$$

En el resultado siguiente se resumen algunas de las propiedades de estas funciones.

Proposición 2.5.2. *Sea $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una colección en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ con la propiedad reticular.*

i) $1 \le h_l(N) \le h_r(N) \le N^{\frac{1}{\rho}}$, para todo $N = 1, 2, \ldots$, donde $\rho = \rho_{\mathbb{X}}$ es el exponente de la ρ-desigualdad triangular en $\mathbb{X}$.

ii) Las funciones h_r y h_l definidas en (2.33) y (2.34), respectivamente, son non-decrecientes para $N = 1, 2, \ldots$.

iii) La función h_r es doblante, es decir, existe una constante $D > 0$ tal que $h_r(2N) \le Dh_r(N)$ para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$

iv) Existe $c \ge 1$ tal que $h_l(N+1) \le c h_l(N)$ para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$

Demostración. i) y ii) Se sigue inmediatamente de la propiedad reticular de $\mathcal{B}$ y de la ρ-desigualdad triangular.

iii) Dado $N \in \mathbb{N}$, elegimos un $\Gamma_o \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma_o| = 2N$ tal que

$$\frac{1}{2} h_r(2N) \le \Big\| \sum_{k\in\Gamma_o} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}.$$

Tomamos $\Gamma_o = \Gamma \cup \Gamma'$ con $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ y $|\Gamma'| = |\Gamma| = N$. Entonces, si $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ satisface la ρ-desigualdad triangular, $0 < \rho \le 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_r(2N) &\le \Big\| \sum_{k\in\Gamma_o} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} = \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} + \sum_{k\in\Gamma'} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \\ &\le \Big(\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}^{\rho} + \Big\| \sum_{\Gamma'} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}^{\rho} \Big)^{\frac{1}{\rho}} \le 2^{\frac{1}{\rho}} h_r(N). \end{aligned}$$

iv) Dado $N \in \mathbb{N}$, elegimos $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$ tal que

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq 2h_l(N).$$

Elegimos un $k_o \notin \Gamma$ y tomamos $\Gamma' = \Gamma \cup \{k_o\}$. Entonces

$$h_l(N+1) \leq \Big\| \sum_{k\in\Gamma'} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq \Big(\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}^{\rho} + 1 \Big)^{\frac{1}{\rho}} \leq (2^{\rho}[h_l(N)]^{\rho} + 1)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Puesto que $h_l(1) = 1 \leq h_l(N)$ se tiene,

$$h_l(N+1) \leq (2^{\rho} + 1)^{\frac{1}{\rho}} h_l(N) \leq 2 \cdot 2^{\frac{1}{\rho}} h_l(N).$$

□

Nota 2.5.3. *De la desigualdad $h_l(N) \leq h_l(N+1) \leq 2\cdot 2^{\frac{1}{\rho}} h_l(N)$, se deduce que $\frac{h_l(N+1)}{h_l(N)} \approx O(1)$, cuando $N \longrightarrow \infty$.*

Nota 2.5.4. *La propiedad iv) en la Proposición 2.5.2 es más débil que h_l doblante. En todos los ejemplos que conocemos h_l es doblante. Sin embargo, no sabemos probar que h_l es doblante en general.*

La siguiente propiedad es válida para espacios de Banach y será usada más adelante en un caso particular.

Proposición 2.5.5. *Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espacio normado y $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una colección reticular en $\mathbb{X}$. Entonces $\frac{h_r(N)}{N}$ es no creciente como función de N.*

Demostración. Sea $\Gamma \subset \mathbb{N}$ un conjunto con $N+1$ elementos. Escribimos

$$\sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} = \sum_{j\in\Gamma} \frac{1}{N} \sum_{k\in\Gamma-\{j\}} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} &\leq \sum_{j\in\Gamma} \frac{1}{N} \Big\| \sum_{k\in\Gamma-\{j\}} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \sum_{j\in\Gamma} \frac{1}{N} h_r(N) = \frac{N+1}{N} h_r(N).\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos conjuntos $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $N+1$ elementos se tiene el resultado.

□

Capítulo 3

Inclusiones generales para los espacios de aproximación no lineal con N-términos

En este capítulo nos dedicaremos a la demostración de los Teoremas 1.2.3, 1.2.4 y 1.2.5 presentados en la introducción referentes a las inclusiones óptimas entre los espacios de Lorentz discretos y los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ y las clases avariciosas $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$. Estos resultados forman parte del artículo [28].

Comenzaremos presentando la notación usada en los enunciados de los teoremas así como las definiciones necesarias para su comprensión.

3.1. Aproximación no lineal con N términos

En esta sección recordamos la descripción general de la *aproximación con N términos* dada en la introducción.

Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espacio cuasi-Banach con una base numerable $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $N = 1, 2, \ldots$, denotamos por $\Sigma_N(\mathcal{B})$ la colección de todos elementos de $\mathbb{X}$ que se pueden expresar como combinación lineal de como mucho N elementos de la base $\mathcal{B}$:

$$\Sigma_N(\mathcal{B}) := \Big\{ y = \sum_{k \in \Lambda} a_k e_k \in \mathbb{X} : \Lambda \subset \mathbb{N},\ |\Lambda| \leq N \Big\}. \tag{3.1}$$

Notamos que el espacio $\Sigma_N(\mathcal{B})$ no es lineal: la suma de dos elementos de $\Sigma_N(\mathcal{B})$ en general está en $\Sigma_{2N}(\mathcal{B})$. En el caso $N = 0$, $\Sigma_0(\mathcal{B}) = \{0\}$.

Para cada $x \in \mathbb{X}$, definimos el error de aproximación de x por los elementos de $\Sigma_N(\mathcal{B})$

por

$$\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} := \sigma_N(x,\mathcal{B},\mathbb{X}) := \inf_{y\in\Sigma_N(\mathcal{B})} \|x-y\|_{\mathbb{X}}, \quad N\geq 0. \tag{3.2}$$

Observamos en particular que $\sigma_0(x)_{\mathbb{X}} = \|x\|_{\mathbb{X}}$.

Cuando $\mathcal{B}$ tiene la propiedad reticular (Definición 2.4.4) puede probarse que para $x=\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \in \mathbb{X}$ realmente tenemos

$$\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \inf_{|\Gamma|=N} \left\{ \left\| x - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma e_\gamma \right\|_{\mathbb{X}} \right\}, \tag{3.3}$$

es decir, solo los coeficientes de x son relevantes cuando calculamos $\sigma_N(x)$ (ver [27], (2.6) o Lema 1 en [40]). Si sólo suponemos que $\mathcal{B}$ es incondicional (Definición 2.4.1) la igualdad (3.3) se reemplaza por una equivalencia debido a la Proposición 2.4.7 (ver también Lema 1 en [40]).

Un algoritmo de aproximación es una sucesión de aplicaciones $T_N : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X},\ N\in\mathbb{N}$, tal que para cada $x\in\mathbb{X}$, $T_N(x)\in\Sigma_N(\mathcal{B})$. Uno de los propósitos fundamentales de la teoría de aproximación es cómo construir un algoritmo de aproximación tal que para todo $x\in\mathbb{X}$ y cada N produce un elemento $T_N(x)\in\Sigma_N(\mathcal{B})$ de manera que el error de aproximación de x por $T_N(x)$ sea comparable con $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}$, es decir,

$$\|x-T_N(x)\|_{\mathbb{X}} \approx \sigma_N(x)_{\mathbb{X}}.$$

Uno de los algoritmos ampliamente investigado en los últimos años capaz de producir aproximaciones con N términos, es el algoritmo avaricioso cuya descripción es la siguiente: si $x=\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j\in\mathbb{X}$ y π es cualquier biyección de $\mathbb{N}$ tal que

$$\|a_{\pi(1)}e_{\pi(1)}\|_{\mathbb{X}} \geq \|a_{\pi(2)}e_{\pi(2)}\|_{\mathbb{X}} \geq \|a_{\pi(3)}e_{\pi(3)}\|_{\mathbb{X}} \geq \dots, \tag{3.4}$$

el **algoritmo avaricioso de etapa** N es la correspondencia,

$$x=\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j \in\mathbb{X} \longmapsto G_N^\pi(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{\pi(j)}e_{\pi(j)} \in \Sigma_N(\mathcal{B}). \tag{3.5}$$

Siempre es cierto que $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}} \leq \|x-G_N^\pi(x)\|_{\mathbb{X}}$. Si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es cierto que $\sigma_k(x)_{\mathbb{H}} = \|x-G_k^\pi(x)\|_{\mathbb{X}}$ para todo $x\in\mathbb{H}$ y todo $k=1,2,3,,\dots$. Para un espacio de Banach esta igualdad puede no ser cierta.

Se dice que una base $\mathcal{B}$ es **avariciosa** en $\mathbb{X}$ si existe una constante $C\geq 1$ tal que para todo $x\in\mathbb{X}$ y $N\in\mathbb{N}$, se tiene

$$\|x-G_N^\pi(x)\|_{\mathbb{X}} \leq C\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}.$$

3.2. Espacios de aproximación y clases avariciosas

Dado un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ con una base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$, otra questión fundamental en la teoría de aproximación es caracterizar los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathbb{X}, \mathcal{B})$, $0 < \alpha < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Recordamos que para $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$, estos espacios se definen como el conjunto de todos $x \in \mathbb{X}$ tales que la cantidad (ver sección 2.2):

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} := \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{N=1}^\infty (N^\alpha \sigma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}))^q \frac{1}{N}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N \geq 1} N^\alpha \sigma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}), & q = \infty, \end{cases} \tag{3.6}$$

es finita.

Debido a que $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}$ es no creciente, se puede obtener una cuasi-norma equivalente en los espacios de aproximación restringiéndose a los números diádicos, es decir, si $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \approx \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{k=0}^\infty (2^{k\alpha} \sigma_{2^k}(x)_{\mathbb{X}})^q\right]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{k=0,1,2\ldots} 2^{k\alpha} \sigma_{2^k}(x)_{\mathbb{X}}, & q = \infty. \end{cases} \tag{3.7}$$

La equivalencia (3.7) se puede probar de la siguiente forma:

Por un lado tenemos,

$$\begin{aligned} \|x\|^q_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} &= \|x\|_{\mathbb{X}} + \sum_{N=1}^\infty (N^\alpha \sigma_N(x)_{\mathbb{X}})^q \frac{1}{N} \\ &= \|x\|_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^\infty \sum_{2^j \leq N < 2^{j+1}} (N^\alpha \sigma_N(x)_{\mathbb{X}})^q \frac{1}{N} \\ &\leq \|x\|_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^\infty (\sigma_{2^j}(x)_{\mathbb{X}})^q \sum_{2^j \leq N < 2^{j+1}} N^{\alpha q} \frac{1}{N} \\ &\approx \|x\|_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^\infty \sigma_{2^j}(x)^q_{\mathbb{X}} 2^{q\alpha j} C_{\alpha,q} \end{aligned}$$

Para la desigualdad contraria usamos, $\sigma_1(x)_{\mathbb{X}} \leq \|x\|_{\mathbb{X}}$ y que $\sigma_N(x)_{\mathbb{X}}$ es no creciente para obtener

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} &\geq \frac{1}{2}\|x\|_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2}\sigma_1(x)_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{2^j\leq N<2^{j+1}}(N^\alpha\sigma_N(x)_{\mathbb{X}})^q\frac{1}{N} \\
&\geq \frac{1}{2}\|x\|_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2}\sigma_1(x)_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^{\infty}(\sigma_{2^{j+1}}(x)_{\mathbb{X}})^q\sum_{2^j\leq N<2^{j+1}}N^{\alpha q}\frac{1}{N} \\
&\approx \|x\|_{\mathbb{X}} + \sigma_1(x)_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^{\infty}(\sigma_{2^{j+1}}(x)_{\mathbb{X}})^q 2^{j\alpha q} \\
&\approx \|x\|_{\mathbb{X}} + \sum_{j=0}^{\infty}(\sigma_{2^{j}}(x)_{\mathbb{X}})^q 2^{j\alpha q}.
\end{aligned}$$

Usando el algoritmo avaricioso definido en (3.5) consideramos un espacio similar a $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$. Para $N=1,2,\ldots$ y $x\in\mathbb{X}$ sea

$$\gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) := \sup_\pi \|x - G_N^\pi(x;\mathcal{B},\mathbb{X})\|_{\mathbb{X}}, \tag{3.8}$$

donde el supremo se toma sobre todas las biyecciones π que satisfacen (3.4).

Las **clases avariciosas** $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, $\alpha>0$, $0<q\leq\infty$ se definen como el conjunto de todos $x\in\mathbb{X}$ tales que la cantidad

$$\|x\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} := \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{N=1}^{\infty}(N^\alpha\gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}))^q\frac{1}{N}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N\geq 1}\gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}), & q=\infty, \end{cases} \tag{3.9}$$

es finita. Las clases $\mathscr{G}_q^\alpha(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ fueron introducidas en el año 2001 por R. Gribonval y M. Nielsen ([30]).

Cuando $\mathcal{B}$ es reticular (ver Definición 2.4.4), $\gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es no creciente y se puede obtener una expresión equivalente en la clase $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, a saber,

$$\|x\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \approx \begin{cases} \|x\|_{\mathbb{X}} + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k\alpha}\gamma_{2^k}(x;\mathcal{B},\mathbb{X}))^q\right]^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty, \\ \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{k=0,1,2,\ldots}2^{k\alpha}\gamma_{2^k}(x;\mathcal{B},\mathbb{X}), & q=\infty. \end{cases} \tag{3.10}$$

La equivalencia (3.10) se demuestra de manera similar a como se hizo la prueba de la equivalencia (3.7).

Puesto que $\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq \gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ para todo $x \in \mathbb{X}$ está claro que

$$\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X}) \tag{3.11}$$

$0 < q \leq \infty,\ 0 < \alpha < \infty$. Es evidente que si una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{X}$ es avariciosa (ver definición al final de la sección 3.2) se tiene $\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X}) = \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X})$ con las normas equivalentes. En la sección 5.4 daremos ejemplos que prueban que en general la inclusión $\mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X})$ no es cierta. Además, en la sección 5.1 mostraremos que las clases $\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X})$ no siempre son lineales.

3.3. Espacios de Lorentz discretos $\ell^{p,q}$, ℓ^q_η

Las inclusiones para los espacios de aproximación y las clases avariciosas en nuestros resultados vienen dadas en términos de los espacios de Lorentz discretos con peso ℓ^q_η (ver Teoremas 1.2.3, 1.2.4 y 1.2.5). En esta sección recordamos la definición y algunas propiedades de estos espacios (ver sección 1.1).

Sea $\eta = \{\eta(k) : k \geq 1\}$ una sucesión de números reales tal que:

(a) $0 \leq \eta(k) \leq \eta(k+1)$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ y $\lim_{k\longrightarrow\infty} \eta(k) = \infty$.

(b) η es doblante, es decir, $\eta(2k) \leq C\eta(k),\ k \geq 1$.

Denotamos por $\mathbb{W}$ el conjunto de las sucesiones que satisfacen (a) y (b).

Si $\eta \in \mathbb{W}$ y $0 < q \leq \infty$, los **espacios de Lorentz discretos con peso**, se definen como el conjunto de todas las sucesiones $\mathbf{s} = \{s_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$ tales que la expresión

$$\|\mathbf{s}\|_{\ell^q_\eta} := \begin{cases} \left[\sum_{k\geq 1} (\eta(k)s^*_k)^q \frac{1}{k}\right]^{\frac{1}{q}}, & 1 < q < \infty, \\ \\ \sup_k \eta(k)s^*_k, & q = \infty, \end{cases} \tag{3.12}$$

es finita, donde $\{s^*_k\}$ denota el reordenamiento no creciente de $|s_k|$.

El caso particular $\{\eta(k) = k^{\frac{1}{\tau}}\}$ corresponde a los espacios de Lorentz discretos clásicos $\ell^{\tau,q}$, $0 < \tau < \infty$ definidos como el conjunto de todas sucesiones $\mathbf{s} = \{s_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$ tales que la expresión

$$\|\mathbf{s}\|_{\ell^{\tau,q}} := \begin{cases} \left[\sum_{k\geq 1} (k^{\frac{1}{\tau}} s^*_k)^q \frac{1}{k}\right]^{\frac{1}{q}}, & 1 < q < \infty, \\ \\ \sup_k k^{\frac{1}{\tau}} s^*_k, & q = \infty, \end{cases} \tag{3.13}$$

es finita.

El espacio ℓ_η^q es un espacio cuasi-Banach invariante por reordenamiento (ver [10], p. 28) y de Banach invariante por reordenamiento cuando $q \geq 1$, y además $\{\eta(k)^q/k\}$ es decreciente (ver [10], p. 28). Los espacios de Lorentz discretos con peso ℓ_η^q para una sucesión η general, y en particular sus propiedades de interpolación son estudiados, por ejemplo, en [10, 50, 60].

Debido a la monotonicidad de $\{s_k^*\}$ se puede obtener una cuasi-norma equivalente en estos espacios.

Lema 3.3.1. *Sean $\eta \in \mathbb{W}$ y $0 < q \leq \infty$. Dado un entero $a > 1$ definir*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\ell_\eta^q}^{a-dy} := \begin{cases} \Big[\sum_{j=0}^{\infty}(\eta(a^j)s_{a^j}^*)^q\Big]^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{j=0,1,2,\dots}\eta(a^j)s_{a^j}^*, & q = \infty. \end{cases} \tag{3.14}$$

Se tiene

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\ell_\eta^q} \approx \|\boldsymbol{s}\|_{\ell_\eta^q}^{a-dy}.$$

Demostración. Para $q = \infty$ es claro que $\|\mathbf{s}\|_{\ell_\eta^q}^{a-dy} \leq \|\mathbf{s}\|_{\ell_\eta^q}$. Por otro lado, si $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ y $a^j \leq k < a^{j+1}$ se tiene

$$\eta(k)s_k^* \leq \eta(a^{j+1})|s_{a^j}^*| \leq C_a\eta(a^j)s_{a^j}^* \tag{3.15}$$

debido a que η es doblante. De aquí se deduce el resultado para $q = \infty$.

Para $q < \infty$, de (3.15) se deduce

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}\|_{\ell_\eta^q} &= \Big[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{a^j\leq k<a^{j+1}}(\eta(k)s_k^*)^q\frac{1}{k}\Big] \\ &\leq C_a\Big[\sum_{j=0}^{\infty}(\eta(a^j)s_{a^j}^*)^q\sum_{a^j\leq k<a^{j+1}}\frac{1}{k}\Big]^{\frac{1}{q}} \\ &= C_a'\Big[\sum_{j=0}^{\infty}(\eta(a^j)s_{a^j}^*)^q\Big]^{\frac{1}{q}} = C_a'\|\mathbf{s}\|_{\ell_\eta^q}^{a-dy}. \end{aligned}$$

Para la desigualdad contraria observar que si $a^j < k \leq a^{j+1}$ se tiene

$$\eta(k)s_k^* \geq \eta(a^j)s_{a^{j+1}}^* \geq C_a^{-1}\eta(a^{j+1})s_{a^{j+1}}^* \tag{3.16}$$

de nuevo por la propiedad doblante de η. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s}\|^q_{\ell^q_\eta} \quad \geq \quad & (\eta(1)s_1^*)^q + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{a^j < k \leq a^{j+1}} (\eta(k)s_k^*)^q \frac{1}{k} \\
& \geq (\eta(1)s_1^*)^q + C_a^{-q} \sum_{j=0}^{\infty} (\eta(a^{j+1})s^*_{a^{j+1}})^q \sum_{a^j < k \leq a^{j+1}} \frac{1}{k} \\
& \geq (\eta(1)s_1^*)^q + C_a^{-q} \log_2 a \sum_{j=1}^{\infty} (\eta(a^j)s^*_{a^j})^q \\
& \geq C \sum_{j=0}^{\infty} (\eta(a^j)s^*_{a^j})^q = C\|\mathbf{s}\|^{a-dy}_{\ell^q_\eta},
\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado. □

Los espacios de Lorentz generales ℓ^q_η ya han sido usados en el estudio de espacios de aproximación $\mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{H}, L^p(0,1)^d)$ asociados con el sistema de Haar multidimensional (ver por ejemplo [39]) y en el estudio de espacios de aproximaciones $\mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{W}, L^\Phi(\mathbb{R}^d))$ en [29]. En nuestras aplicaciones usaremos las sucesiones $\eta(k) = \{k^\alpha h_r(k; \mathcal{B}, \mathbb{X})\}_{k\geq 1}$ y $\eta(k) = \{k^\alpha h_l(k; \mathcal{B}, \mathbb{X})\}_{k\geq 1}$ para un $\alpha > 0$ apropiado las cuales siempre verifican las condiciones (a) y (b) que definen la clase $\mathbb{W}$. Recordamos que $h_r(N; \mathcal{B}, \mathbb{X})$ y $h_l(N; \mathcal{B}, \mathbb{X})$ son las funciones de democracia de la base $\mathcal{B}$ por la derecha y por la izquierda (ver sección 2.5).

Definición 3.3.2. *Dado un espacio cuasi-Banach* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *con una base* $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *y* $\eta \in \mathbb{W}$ *definimos*

$$\begin{aligned}
\ell^q_\eta(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \quad = \quad & \Big\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \mathbb{X} : \|x\|_{\ell^q_\eta(\mathcal{B},\mathbb{X})} \\
& := \|\{\|c_k e_k\|_{\mathbb{X}}\}_k\|_{\ell^q_\eta} < \infty \Big\}. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Cuando $\eta \in \mathbb{W}$ estos espacios son cuasi-normados.

Ocasionalmente necesitaremos usar una condición más fuerte en la sucesión η. Para una sucesión creciente η definimos,

$$M_\eta(m) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\eta(k)}{\eta(mk)}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3.18)$$

Puesto que estamos suponiendo que η es creciente, es cierto que $M_\eta(m) \leq 1$. Definiremos $\mathbb{W}_+$ la clase de todas sucesiones $\eta \in \mathbb{W}$ tales que existe un entero $m_0 > 1$ para el cual

$M_\eta(m_0) < 1$. Eso es equivalente a $i_\eta > 0$, donde i_η es el índice de dilatación inferior que definimos por

$$i_\eta := \sup_{m\geq 1} \frac{\log M_\eta(m)}{-\log m}. \tag{3.19}$$

Por ejemplo $\eta(k) = \{k^\alpha \log^\beta(k+1)\}$ tiene $i_\eta = \alpha$ y por lo tanto, $\eta \in \mathbb{W}_+$ si y sólo si $\alpha > 0$. En general si η se obtiene de una función creciente $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como $\eta(k) = \phi(ak)$, para algún $a > 0$, entonces $i_\eta > 0$ si y sólo si $i_\phi > 0$, donde la última denota el índice estándar de dilatación inferior de ϕ (ver [44] pag. 54).

En este trabajo necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 3.3.3. *Si $\eta \in \mathbb{W}_+$ existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j=0}^{n} \eta(m_0^j) \leq C\eta(m_0^n) \quad \textit{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $m_0 > 1$ es un entero como en la definición de $\mathbb{W}_+$.

Demostración. Sea $\alpha = M_\eta(m_0) < 1$. Por definición $M_\eta(m_0) = \alpha \geq \frac{\eta(m_0^j)}{\eta(m_0 m_0^j)}$ para todo $j = 0, 1, 2, \ldots$. Esto implica

$$\eta(m_0^j) \leq \alpha\eta(m_0^{j+1}) \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.20}$$

Usando (3.20) deducimos que $\eta(m_0^j) \leq \alpha^{n-j}\eta(m_0^n)$, para $j = 0, 1, 2 \ldots, n$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=0}^{n} \eta(m_0^j) \leq \eta(m_0^n) \sum_{j=0}^{n} \alpha^{n-j} \leq \eta(m_0^n) \frac{1}{(1-\alpha)}$$

porque $\alpha < 1$.

□

Nota 3.3.4. *Si η es creciente y doblante, es decir, $\eta \in \mathbb{W}$, entonces $k^\alpha \eta(k) \in \mathbb{W}_+$ para todo $\alpha > 0$. También si $\eta \in \mathbb{W}_+$ entonces $\eta^r \in \mathbb{W}_+$ para todo $r > 0$ con el mismo m_0.*

En el siguiente resultado se estudian las funciones de democracia de la base canónica en los espacios ℓ_η^q. Denotamos por $\mathbf{e}_j$ la sucesión $\{\delta_{j,k}\}_{k=1}^\infty$ y por $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^\infty$ la base canónica en el espacio de sucesiones sobre $\mathbb{N}$ ℓ_η^q, $0 < q \leq \infty$.

Lema 3.3.5. *(a) Si $\{\eta(k)\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{W}$*

$$\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_j}{\|\boldsymbol{e}_j\|_{\ell_\eta^\infty}} \Big\|_{\ell_\eta^\infty} \approx \eta(|\Gamma|)$$

y por lo tanto,

$$h_l(N;\mathcal{B}_c,\ell^\infty_\eta) = h_r(N;\mathcal{B}_c,\ell^\infty_\eta) \approx \eta(N), \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Además, si $0 < q < \infty$,

$$\eta(|\Gamma|) \lesssim \Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_j}{\|\boldsymbol{e}_j\|_{\ell^q_\eta}} \Big\|_{\ell^q_\eta} \lesssim \eta(|\Gamma|)(\log(|\Gamma|))^{\frac{1}{q}}$$

y por lo tanto,

$$\eta(N) \lesssim h_l(N;\mathcal{B}_c,\ell^q_\eta) \le h_r(N;\mathcal{B}_c,\ell^q_\eta) \lesssim \eta(N)(\log N)^{\frac{1}{q}},\ \forall N \in \mathbb{N}.$$

(b) Si $\eta \in \mathbb{W}_+$ *y* $0 < q < \infty$,

$$\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_j}{\|\boldsymbol{e}_j\|_{\ell^q_\eta}} \Big\|_{\ell^q_\eta} \approx \eta(|\Gamma|)$$

y por lo tanto,

$$h_l(N;\mathcal{B}_c,\ell^q_\eta) \approx h_r(N;\mathcal{B}_c,\ell^q_\eta) \approx \eta(N),\ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Demostración. (a) Puesto que $\|e_j\|_{\ell^\infty_\eta} = \eta(1)$ para todo $j = 1, 2, \ldots$ se tiene

$$\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_j}{\|\mathbf{e}_j\|_{\ell^\infty_\eta}} \Big\|_{\ell^\infty_\eta} = \frac{1}{\eta(1)} \sup_{k=1,\ldots,|\Gamma|} \eta(k) \approx \eta(|\Gamma|)$$

de donde se deduce el resultado deseado para $q = \infty$. Para $0 < q < \infty$ por un lado se tiene

$$\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_j}{\|\mathbf{e}_j\|_{\ell^q_\eta}} \Big\|_{\ell^q_\eta} = \frac{1}{\eta(1)} \Big(\sum_{k=1}^{|\Gamma|} \eta(k)^q \frac{1}{k} \Big)^{\frac{1}{q}} \lesssim \eta(|\Gamma|)(\log|\Gamma|)^{\frac{1}{q}}.$$

Por otro lado, como η es no decreciente

$$\Big\| \sum_{j\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_j}{\|\mathbf{e}_j\|_{\ell^q_\eta}} \Big\|_{\ell^q_\eta} = \frac{1}{\eta(1)} \Big(\sum_{k=1}^{|\Gamma|} \eta(k)^q \frac{1}{k} \Big)^{\frac{1}{q}} \gtrsim \Big(\sum_{k=\frac{|\Gamma|}{2}}^{|\Gamma|} \eta(k)^q \frac{1}{k} \Big)^{\frac{1}{q}} \gtrsim \eta\Big(\frac{|\Gamma|}{2}\Big) \gtrsim \eta(|\Gamma|)$$

donde la última desigualdad se debe a que η es doblante.

(b) Si $\eta \in \mathbb{W}_+$ se tiene que $\eta^q \in \mathbb{W}_+$ y por el Lema 3.3.3 existe un entero $m_0 > 1$ tal que

$$\sum_{j=0}^{n} [\eta(m_0^j)]^q \le C\eta(m_0^n)^q,\ \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces, si $\lambda_0 = [\log_{m_0}|\Gamma|]$

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j\in\Gamma}\frac{e_j}{\|e_j\|_{\ell^q_\eta}}\Big\|_{\ell^q_\eta} &= \frac{1}{\eta(1)}\Big(\sum_{k=1}^{|\Gamma|}\eta(k)\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{\eta(1)}\Big(\sum_{j=0}^{\lambda_0}\sum_{m_0^j\le k<m_0^{j+1}}(\eta(k))^q\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \frac{1}{\eta(1)}\Big(\sum_{j=0}^{\lambda_0}\eta(m_0^{j+1})^q\log m_0\Big)^{\frac{1}{q}} \le C_\eta\eta(m_0^{\lambda_0})^q\\
&\le C\eta(|\Gamma|)^q
\end{aligned}$$

en donde hemos usado que η es doblante. □

Nota 3.3.6. *Para $\eta(k) = (\log(k+1))^\beta \in \mathbb{W}\setminus\mathbb{W}_+$ $(\beta>0)$ se tiene*

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{N}\eta(k)^q\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{q}} &= \Big(\sum_{k=1}^{N}(\log(k+1)^{\beta q}\frac{1}{k})\Big)^{\frac{1}{q}} \approx \Big(\int_1^N(\log x)^{\beta q}\frac{1}{x}dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\approx (\log N)^{\beta+\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Por tanto, en este caso

$$h_l(N;\mathcal{B}_c,\ell^q_\eta)\approx h_r(N;\mathcal{B}_c,\ell^q_\eta)\approx(\log N)^{\beta+\frac{1}{q}}\approx\eta(N)(\log N)^{\frac{1}{q}}$$

por lo que tenemos un ejemplo en el que se muestra que $\eta\in\mathbb{W}_+$ es necesaria en la parte (b) del Lema 3.3.5.

3.4. Caracterización de las desigualdades de tipo Jackson

En esta sección se prueba que las inclusiones de la parte izquierda de (1.45) son equivalentes a que se verifiquen desigualdades de tipo Jackson. Probaremos que estas inclusiones y las desigualdades de tipo Jackson están vinculadas con la función de democracia de la base por la derecha. Comenzamos con las inclusiones para las clases avariciosas $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

3.4.1. Inclusiones para las clases avariciosas

Teorema 3.4.1. ***(Inclusiones para las clases avariciosas)*** *Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_j : j\in\mathbb{N}\}$ es una base reticular en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Fijamos $\alpha>0$ y $q\in(0,\infty)$. Entonces, para cualquier sucesión η tal que $\{k^\alpha\eta(k)\}_{k=1}^\infty\in\mathbb{W}_+$ las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$ y todo conjunto $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$ tenemos*

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_k}{\|\boldsymbol{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C\eta(N). \tag{3.21}$$

2. *(Desigualdad de tipo Jackson para $\ell^{\infty}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$). Existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$*

$$\gamma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \leq C_\alpha N^{-\alpha} \|x\|_{\ell^{\infty}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \quad \forall\, x \in \ell^{\infty}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}). \tag{3.22}$$

3. $\ell^{\infty}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}; \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\alpha}_{\infty}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

4. $\ell^{q}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

5. *(Desigualdad de tipo Jackson para $\ell^{q}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$). Existe $C_{\alpha,q} > 0$ tal que para todo $N = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene:*

$$\gamma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \leq C_{\alpha,q} N^{-\alpha} \|x\|_{\ell^{q}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \quad \forall\, x \in \ell^{q}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}; \mathbb{X}). \tag{3.23}$$

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. Dado $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k \in \ell^{\infty}_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$, sea $\pi(k)$ una biyección de $\mathbb{N}$ tal que

$$\|c_{\pi(k)} e_{\pi(k)}\|_{\mathbb{X}} \geq \|c_{\pi(k+1)} e_{\pi(k+1)}\|_{\mathbb{X}}, \ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.24}$$

Si $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ satisface la ρ-desigualdad triangular y $N = 1, 2, 3 \ldots$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|x - G^{\pi}_N(x)\|^{\rho}_{\mathbb{X}} &= \Big\| \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{\pi(k)} e_{\pi(k)} \Big\|^{\rho}_{\mathbb{X}} = \Big\| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{2^m N < k \leq 2^{m+1} N} c_{\pi(k)} e_{\pi(k)} \Big\|^{\rho}_{\mathbb{X}} \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \Big\| \sum_{2^m N < k \leq 2^{m+1} N} c_{\pi(k)} e_{\pi(k)} \Big\|^{\rho}_{\mathbb{X}}.
\end{aligned}$$

Por (2.31) con $C = 1$ (una consecuencia de la propiedad reticular) y (3.24) deducimos

$$\|x - G^{\pi}_N(x)\|^{\rho}_{\mathbb{X}} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|c_{\pi(2^m N)} e_{\pi(2^m N)}\|^{\rho}_{\mathbb{X}} \Big\| \sum_{2^m N < k \leq 2^{m+1} N} \frac{e_{\pi(k)}}{\|e_{\pi(k)}\|_{\mathbb{X}}} \Big\|^{\rho}_{\mathbb{X}}.$$

Existen $2^m N$ elementos de $\mathbb{N}$ en el interior de la segunda suma de la desigualdad anterior. Debido a esto usamos 1. para obtener

$$\|x - G_N^\pi(x)\|_{\mathbb{X}}^\rho \leq C^\rho \sum_{m=0}^{\infty} \|c_{\pi(2^mN)}e_{\pi(2^mN)}\|_{\mathbb{X}}^\rho [\eta(2^mN)]^\rho \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} &= C^\rho \sum_{m=0}^{\infty} (2^mN)^{\alpha\rho}[\eta(2^mN)]^\rho \|e_{\pi(2^mN)}e_{\pi(2^mN)}\|_{\mathbb{X}}^\rho (2^mN)^{-\alpha\rho} \\ &\leq C^\rho \|x\|^\rho_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} N^{-\alpha\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m\alpha\rho}} \\ &= C^\rho \|x\|^\rho_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} N^{-\alpha\rho} \frac{2^{\alpha\rho}}{2^{\alpha\rho}-1}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todas las biyecciones que satisfacen (3.24) se obtiene el resultado.

Nota 3.4.2. *Usando el argumento similar al usado en* 1. $\Longrightarrow$ 2. *aplicado a* $x = \sum_{k=1}^\infty c_{\pi(k)}e_{\pi(k)} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{2^m\leq k<2^{m+1}} c_{\pi(k)}e_{\pi(k)}$, *obtenemos*

$$\|x\|_{\mathbb{X}} \leq \|x\|_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \frac{2^\alpha}{(2^{\alpha\rho}-1)^{\frac{1}{\rho}}}$$

lo que prueba la inclusión continua $\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{X}$ *y consecuentemente* $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{X}$ *para todo* $0 < q < \infty$. *En particular esto implica que* $\ell^q_\eta(\mathcal{B},\mathbb{X})$ *son espacios cuasi-Banach completos, y por tanto copias isomorfas de* ℓ^q_η *en* $\mathbb{X}$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Puesto que para $x \in \ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$ se tiene

$$\sup_{N\geq 1} N^\alpha \gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq C_\alpha \|x\|_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})},$$

entonces de la definición de $\mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y la Nota 3.4.2 tenemos

$$\|x\|_{\mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} = \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{N\geq 1} N^\alpha \gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq C'_\alpha \|x\|_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}.$$

3. $\Longrightarrow$ 1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$. Elegimos Γ_1 tal que $|\Gamma_1| = N$ y $\Gamma \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Consideramos

$$x_N = \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} + \sum_{k\in\Gamma_1} \frac{2\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}}.$$

Entonces,

$$\gamma_N(x_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}. \tag{3.26}$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned}\|x_N\|_{\mathscr{G}^\alpha_\infty(\mathcal{B},\mathbb{X})} &= \|x_N\|_{\mathbb{X}} + \sup_{k=1,2,\ldots,2N} k^\alpha \gamma_k(x_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\geq N^\alpha \gamma_N(x_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = N^\alpha \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}.\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos, puesto que $\{k^\alpha \eta(k)\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{W}$,

$$\|x_N\|_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \lesssim N^\alpha \eta(N)$$

por la parte (a) del Lema 3.3.5. Puesto que suponemos la inclusión $\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_\infty(\mathcal{B},\mathbb{X})$, entonces existe $C' > 0$ tal que

$$\begin{aligned}N^\alpha \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} &\leq \|x_N\|_{\mathscr{G}^\alpha_\infty(\mathcal{B},\mathbb{X})} \leq C' \|x_N\|_{\ell^\infty_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \\ &\leq C N^\alpha \eta(N),\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado deseado.

5. $\Longrightarrow$ 1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = N$. Elegimos Γ_1 y x_N como en la prueba de 3. $\Longrightarrow$ 1. De (3.26) sabemos que

$$\gamma_N(x_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}.$$

Entonces,

$$\|x_N\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \leq 2 \Big\| \sum_{k\in\Gamma\cup\Gamma_1} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}} \Big\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \approx (2N)^\alpha \eta(2N) \lesssim N^\alpha \eta(N)$$

por la parte (b) del Lema 3.3.5, porque $\{k^\alpha \eta(k)\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{W}_+$. Puesto que estamos suponiendo 5., tenemos

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} &= \gamma_N(x_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq C_{\alpha,\rho} N^{-\alpha} \|x_N\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \\ &\leq C_{\alpha,q} \eta(N).\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado deseado.

1. $\Longrightarrow$ 4. Dado $x \in \ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$ procedemos como en la demostración de 1. $\Longrightarrow$ 2. Escribimos $x = \sum_{j=0}^\infty \sum_{2^j \leq k < 2^{j+1}} c_k e_k$; entonces usando el argumento similar al que conduce a (3.25) se obtiene

$$\|x - G^\pi_{2^m}(x)\|^\mu_{\mathbb{X}} \leq C^\mu \sum_{j=m}^\infty \|c_{\pi(2^j)} e_{\pi(2^j)}\|^\mu_{\mathbb{X}} [\eta(2^j)]^\mu \tag{3.27}$$

para cualquier biyección $\pi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ que verifica (3.24) (ver 3.25) y μ se elige de manera que $q/\mu\geq 1$. Notamos que eso es siempre posible porque si $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ satisface la ρ-desigualdad triangular $\|x+y\|_{\mathbb{X}}^\rho\leq\|x\|_{\mathbb{X}}^\rho+\|y\|_{\mathbb{X}}^\rho$, para todo $0<\mu\leq\rho$, se tiene

$$\|x+y\|_{\mathbb{X}}^\mu=(\|x+y\|_{\mathbb{X}}^\rho)^{\frac{\mu}{\rho}}\leq(\|x\|_{\mathbb{X}}^\rho+\|y\|_{\mathbb{X}}^\rho)^{\frac{\mu}{\rho}}\leq\|x\|_{\mathbb{X}}^\mu+\|y\|_{\mathbb{X}}^\mu,$$

puesto que $\mu/\rho\leq 1$. Así, μ puede ser elegido tan pequeño como queramos.
Por lo tanto, de (3.27) tenemos

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_{m=0}^\infty(2^{m\alpha}\|x-G_m^\pi(x)\|_{\mathbb{X}})^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C\Big[\sum_{m=0}^\infty 2^{m\alpha q}\Big(\sum_{j=m}^\infty[\|c_{\pi(2^j)}e_{\pi(2^j)}\|_{\mathbb{X}}\eta(2^j)]^\mu\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&=C\Big[\sum_{m=0}^\infty 2^{m\alpha q}\Big(\sum_{j=0}^\infty[\|c_{\pi(2^{j+m})}e_{\pi(2^{j+m})}\|_{\mathbb{X}}\eta(2^{j+m})]^\mu\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ahora puesto que $q/\mu\geq 1$, usamos la desigualdad de Minkowski en el miembro derecho de la desigualdad anterior y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_{m=0}^\infty(2^{m\alpha}\|x-G_{2^m}^\pi(x)\|_{\mathbb{X}})^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C\Big[\sum_{j=0}^\infty\Big(\sum_{m=0}^\infty 2^{m\alpha q}\|c_{\pi(2^{j+m})}e_{\pi(2^{j+m})}\|_{\mathbb{X}}^q[\eta(2^{j+m})]^q\Big)^{\frac{\mu}{q}}\Big]^{\frac{1}{\mu}}.
\end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por $2^{j\alpha\mu}$ el miembro derecho de la desigualdad anterior y por la versión diádica de la definición de $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver Lema 3.3.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\Big[\sum_{m=0}^\infty(2^{m\alpha}\|x-G_{2^m}^\pi(x)\|_{\mathbb{X}})^q\Big]^{\frac{1}{q}}\\
&=C\Big[\sum_{j=0}^\infty 2^{-j\alpha\mu}\Big(\sum_{m=0}^\infty 2^{(j+m)\alpha q}(\|c_{\pi(2^{j+m})}e_{\pi(2^{j+m})}\|_{\mathbb{X}}\eta(2^{j+m}))^q\Big)^{\frac{\mu}{q}}\Big]^{\frac{1}{\mu}}\\
&=C\Big[\sum_{j=0}^\infty 2^{-j\alpha\mu}\Big(\sum_{l=j}^\infty 2^{l\alpha q}(\|c_{\pi(2^l)}e_{\pi(2^l)}\|_{\mathbb{X}}\eta(2^l))^q\Big)^{\frac{\mu}{q}}\Big]^{\frac{1}{\mu}}\\
&\leq C'\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}\Big(\sum_{j=0}^\infty 2^{-j\alpha\mu}\Big)^{\frac{1}{\mu}}=C'\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}\Big(\frac{1}{1-2^{-\alpha\mu}}\Big)^{\frac{1}{\mu}}\\
&=C'\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}\frac{2^\alpha}{(2^{\alpha\mu}-1)^{\frac{1}{\mu}}}.
\end{aligned}$$

El resultado queda demostrado tomando el supremo sobre todas las π que satisfacen (3.24) y haciendo uso de la cuasi-norma equivalente (3.10) y la Nota 3.4.2.

4. $\Longrightarrow$ 5. Dado $N = 1, 2, 3, \ldots$ elegimos un m tal que $2^m \leq N < 2^{m+1}$. Entonces para $x \in \ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$, tenemos

$$\begin{aligned} N^\alpha \gamma_N(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}) &\leq 2^{(m+1)\alpha}\gamma_{2^m}(x; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \leq 2^\alpha C \|x\|_{\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B},\mathbb{X})} \\ &\leq C\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debida a nuestra hipótesis 4. $\square$

Nota 3.4.3. *Las equivalencias de 1. a 3. siguen siendo validas suponiendo la condición más débil* $\{k^\alpha \eta(k)\} \in \mathbb{W}$.

Nota 3.4.4. *Observe que si cualquiera de las afirmaciones de 2. a 5. son ciertas para un* $\alpha > 0$ *y* $q \in (0, \infty]$ *fijos, entonces son ciertas para todo* α *y* q *(siempre y cuando* $\{k^\alpha \eta(k)\} \in \mathbb{W}_+$*), puesto que la desigualdad en 1. es independiente de estos parámetros.*

Las inclusiones del Teorema anterior son las mejores en el sentido del siguiente corolario.

Corolario 3.4.5. ***(Inclusiones óptimas en*** $\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X})$***)*** *Sea* $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una base reticular en un espacio cuasi-Banach* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\mathbb{X})$. *Sean* $\alpha > 0$ *y* $0 < q \leq \infty$ *fijos. Entonces*

$$\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X}). \tag{3.28}$$

Ademaś, si $\omega \in \mathbb{W}_+$ *entonces,* $\ell^q_\omega(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ *si y sólo si* $\omega(k) \gtrsim k^\alpha h_r(k)$ *(por tanto* $\ell^q_\omega(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$*).*

Demostración. Observamos que $\eta(N) = h_r(N) = h_r(N; \mathcal{B}, \mathbb{X})$ satisface (3.21) con $C = 1$ y $k^\alpha h_r(k) \in \mathbb{W}_+$ (ver Proposición 2.5.2); entonces el Teorema 3.4.1 prueba la inclusión (3.28).

Para la segunda afirmación, tomamos $\eta(k) = \omega(k)/k^\alpha$ y el resultado se obtiene de la equivalencia 1. $\Longleftrightarrow$ 4. y 1. $\Longleftrightarrow$ 3. en el Teorema 3.4.1, para $0 < q < \infty$ y $q = \infty$, respectivamente. Esto prueba que $\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ es el espacio de Lorentz discreto con peso más grande incluido en $\mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}, \mathbb{X})$. $\square$

3.4.2. Inclusiones para los espacios de aproximación

Teorema 3.4.6. ***(Inclusiones para los espacios de aproximación)*** *Supongamos que* $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ *es una base reticular en un espacio cuasi-Banach* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\mathbb{X})$. *Sean* $\alpha > 0$ *y* $0 < q \leq \infty$ *fijos. Entonces, para cualquier sucesión* $\{\eta(k)\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{W}_+$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $C>0$ tal que para todo $N=1,2,3,\dots,$ y todo conjunto $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$ tenemos*

$$\Big\|\sum_{k\in\Gamma}\frac{\boldsymbol{e}_k}{\|\boldsymbol{e}_k\|_{\mathbb{X}}}\Big\|_{\mathbb{X}}\le C\eta(N). \tag{3.29}$$

2. $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

3. *(Desigualdad de tipo Jackson para $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$). Existe $C_{\alpha,q}>0$ tal que para todo $N=1,2,\dots,$ se tiene*

$$\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})\le C_{\alpha,q}N^{-\alpha}\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})},\quad\forall x\in\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{3.30}$$

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. Se obtiene del Teorema 3.4.1 y de la desigualdad $\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})\le\gamma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$.

2. $\Longrightarrow$ 3. De la definición de $\mathcal{A}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, la inclusión $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathcal{A}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y 2. se obtiene

$$\begin{aligned}N^\alpha\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X})\ &\le\ \|x\|_{\mathcal{A}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}\le C\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}\\ &\le C'\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}.\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado.

3. $\Longrightarrow$ 1. Empezamos con el caso $N=m_0^n$ donde $m_0>1$ es como en la definición de $\mathbb{W}_+$. Denotamos por

$$\widetilde{1}_\Gamma=\sum_{k\in\Gamma}\frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}}, \tag{3.31}$$

la función característica normalizada de un conjunto Γ. Tomamos $\Gamma_n\subset\mathbb{N}$ tal que $|\Gamma_n|=m_0^n$. Podemos encontrar un subconjunto $\Gamma_{n-1}\subset\Gamma_n$ con $|\Gamma_{n-1}|=m_0^{n-1}$ tal que

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma_n}-\widetilde{1}_{\Gamma_{n-1}}\|_{\mathbb{X}}\le 2\sigma_{m_0^{n-1}}(\widetilde{1}_{\Gamma_n};\mathcal{B},\mathbb{X})$$

(ver 3.3). Usando (3.30) y la parte (b) del Lema 3.3.5 (observar que $\{k^\alpha\eta(k)\}\in\mathbb{W}_+$) tenemos,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{1}_{\Gamma_n}-\widetilde{1}_{\Gamma_{n-1}}\|_{\mathbb{X}}\ &\le\ C_{\alpha,q}(m_0^{n-1})^{-\alpha}\|\widetilde{1}_{\Gamma_n}\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B}.\mathbb{X})}\\ &\approx C_{\alpha,q}m_0^{-n\alpha}\eta(m_0^n)m_0^{n\alpha}=C_{\alpha,q}\eta(m_0^n).\end{aligned}$$

Repitiendo el argumento anterior podemos elegir $\Gamma_{j-1} \subset \Gamma_j$ tal que $|\Gamma_j| = m_0^j$ y

$$\begin{aligned} \|\widetilde{1}_{\Gamma_j} - \widetilde{1}_{\Gamma_{j-1}}\|_{\mathbb{X}} &\leq 2\sigma_{m_0^{j-1}}(\widetilde{1}_{\Gamma_j}; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \\ &\leq C_{\alpha,q}(m_0^{j-1})^{-\alpha} \|\widetilde{1}_{\Gamma_j}\|_{\ell^q_{k^\alpha \eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \\ &\leq C_{\alpha,q}\eta(m_0^j), \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$. Usando la ρ-desigualdad triangular de $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, con $\Gamma_{-1} = \emptyset$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{1}_{\Gamma_n}\|_{\mathbb{X}}^\rho &= \Big\| \sum_{j=0}^n \widetilde{1}_{\Gamma_j} - \widetilde{1}_{\Gamma_{j-1}} \Big\|_{\mathbb{X}}^\rho \leq \sum_{j=0}^n \|\widetilde{1}_{\Gamma_j} - \widetilde{1}_{\Gamma_{j-1}}\|_{\mathbb{X}}^\rho \\ &\leq C_{\alpha,q}^\rho \sum_{j=0}^n [\eta(m_0^j)]^\rho. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.3.3 y la Nota 3.3.4 tenemos:

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma_n}\|_{\mathbb{X}}^\rho \leq C_{\alpha,q}^\rho C \eta(m_0^n)^\rho \tag{3.32}$$

como queríamos probar.

Para N general, elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_0^{n-1} \leq N < m_0^n$. Entonces, si $|\Gamma| = N$ cogemos un $\Gamma' \subset \mathbb{N}$ tal que $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ y $|\Gamma \cup \Gamma'| = m_0^n$. De (3.32) y por la propiedad reticular de $\mathcal{B}$ tenemos:

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq \Big\| \sum_{k\in\Gamma\cup\Gamma'} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C\eta(m_0^n).$$

Puesto que η es doblante, $\eta(m_0^n) \leq \eta(2^{l_0} m_0^{n-1}) \leq CD^{l_0}\eta(N)$, tomando cualquier $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 \leq 2^{l_0}$. Por lo tanto,

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq CD^{l_0}\eta(N).$$

□

Nota 3.4.7. *Como en la nota 3.4.2, observe que si cualquier de las afirmaciones en* 2. *o* 3. *son ciertas para un* $\alpha > 0$ *y* $q \in (0, \infty]$ *fijos, entonces siguen siendo ciertas para todo* α *y* q*, ya que 1. es independiente de estos parámetros.*

Nota 3.4.8. *Observe también que las implicaciones* 1. $\Longrightarrow$ 2. $\Longrightarrow$ 3. *siguen siendo ciertas suponiendo la condición más débil* $\{k^\alpha \eta(k)\} \in \mathbb{W}_+$*. Sin embargo, la hipótesis más fuerte* $\eta \in \mathbb{W}_+$ *es crucial para obtener* 3. $\Longrightarrow$ 1.*, y no se puede quitar como veremos en la sección 4.6 (capítulo 4).*

Las inclusiones del Teorema anterior son las mejores en el sentido del siguiente corolario.

Corolario 3.4.9. ***(Inclusiones óptimas en $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$)*** *Sea $\mathcal{B}=\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ una base reticular en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Fijamos un $\alpha>0$ y $q\in(0,\infty]$. Entonces*

$$\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{3.33}$$

Si para algún $\omega\in\mathbb{W}_+$ tenemos $\ell^q_\omega(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, entonces debemos tener $\omega(k)\gtrsim k^\alpha$. Además, si $\omega(k)=k^\alpha\eta(k)$, con η creciente y doblante, entonces

(a) si $i_\eta>0$, debemos tener $\eta(k)\gtrsim h_r(k)$ necesariamente, y por lo tanto,

$$\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

(b) si $i_\eta=0$, entonces $\eta(k)\gtrsim h_r(k)/(\log k)^{\frac{1}{\rho}}$ y

$$\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\ell^q_{\{k^\alpha h_r(k)/(\log k)^{\frac{1}{\rho}}\}}(\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

Demostración. La inclusión (3.33) es una consecuencia del Corolario 3.4.5.
(a) Como $i_\eta>0$ se tiene que $\eta\in\mathbb{W}_+$ y el resultado se sigue de 2. $\Longrightarrow$ 1. en el Teorema 3.4.6.
(b) Usando el mismo argumento de la prueba de 3. $\Longrightarrow$ 1. en el Teorema 3.4.6, tomamos $\Gamma_n\subset\mathbb{N}$ tal que $|\Gamma_n|=m_0^n$ y tenemos

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma_n}\|_{\mathbb{X}}\lesssim\Big(\sum_{j=0}^{n}(\eta(m_0^j))^\rho\Big)^{\frac{1}{\rho}}\lesssim\eta(m_0^n)n^{\frac{1}{\rho}}.$$

Entonces para $N=m_0^n$ tenemos $h_r(N)\lesssim\eta(N)(\log N)^{\frac{1}{\rho}}$ y por la propiedad doblante de η esto es cierto para todo $N\in\mathbb{N}$. Finalmente, si $\ell^q_\omega(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ para alguna sucesión $\omega\in\mathbb{W}_+$, entonces por la parte (b) del Lema 3.3.5 y por la hipótesis, dado un conjunto $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$ tenemos

$$\omega(N)\approx\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_\omega(\mathcal{B},\mathbb{B})}\gtrsim\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathcal{A}^\alpha_\infty(\mathcal{B},\mathbb{X})}\geq(N/2)^\alpha\sigma_{N/2}(\widetilde{1}_\Gamma)\geq(N/2)^\alpha.$$

□

3.5. Caracterización de las desigualdades de tipo Bernstein

En esta sección se prueba que las inclusiones de la parte derecha de (1.45) son equivalentes a que se verifiquen desigualdades de tipo Bernstein. Probaremos que estas inclusiones y la desigualdad de Bernstein están vinculadas con la función de democracia de la base por la izquierda. Empezamos probando un resultado preliminar necesário para la demostración del teorema principal de esta sección.

Proposición 3.5.1. *Sea $\mathbb{E}$ un subespacio de $\mathbb{X}$ dotado de una cuasi-norma $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ que satisface la ρ-desigualdad triangular para algún $\rho = \rho_{\mathbb{E}}$. Para cada $\alpha > 0$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $C_\alpha > 0$ tal que $\|x\|_{\mathbb{E}} \leq C_\alpha N^\alpha \|x\|_{\mathbb{X}}$, para todo $x \in \Sigma_N$, $\forall\ N = 1, 2, 3, \ldots$*
2. *$\mathcal{A}_\rho^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{E}$.*
3. *$\mathscr{G}_\rho^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{E}$.*

Para la demostración de esta proposición observamos en primer lugar que para cada $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$, los espacios de aproximación $\mathcal{A}_q^\alpha$ y las clases avariciosas $\mathscr{G}_q^\alpha$, satisfacen las desigualdades de tipo Bernstein, es decir, existe $C_{\alpha,q} > 0$ tal que

$$\|x\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \leq \|x\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \leq C_{\alpha,q} N^\alpha \|x\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall\ x \in \Sigma_N,\ N = 1, 2, \ldots \tag{3.34}$$

Esto se obtiene fácilmente de las definiciones de las cuasi-normas (3.6) y (3.9) y de la estimación trivial $\sigma_N(x) \leq \gamma_N(x) \leq \|x\|_{\mathbb{X}}$ (ver Lema 2.3.6 para el caso de $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$).

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. Dado $x \in \mathcal{A}_\rho^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ por el teorema de representación para los espacios de aproximación (ver por ejemplo [63]) podemos escribir $x = \sum_{k=0}^\infty x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ con $x_k \in \Sigma_{2^k}$, tal que

$$\Big(\sum_{k=0}^\infty 2^{k\alpha\rho} \|x_k\|_{\mathbb{X}}^\rho\Big)^{\frac{1}{\rho}} \approx C\|x\|_{\mathcal{A}_\rho^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}. \tag{3.35}$$

De la hipótesis 1., la $\rho_{\mathbb{E}}$-desigualdad triangular y de (3.35) se obtiene

$$\|x\|_{\mathbb{E}}^\rho \leq \sum_{k=0}^\infty \|x_k\|_{\mathbb{E}}^\rho \leq C_\alpha^\rho \sum_{k=0}^\infty 2^{k\alpha\rho} \|x\|_{\mathbb{E}}^\rho \leq C' \|x\|_{\mathcal{A}_\rho^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}^\rho.$$

2. $\Longrightarrow$ 3. Esta implicación se deduce de la inclusión trivial $\mathscr{G}_\rho^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_\rho^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.
3. $\Longrightarrow$ 1. Si $x \in \Sigma_N,\ \gamma_k(x)_{\mathbb{X}} = 0$ si $k \geq N$. Entonces, usando la hipótesis 3. junto con (3.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathbb{E}} &\leq C\|x\|_{\mathscr{G}_\rho^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} = C\Big(\|x\|_{\mathbb{X}} + \Big(\sum_{k=1}^{N-1} k^{\alpha\rho} \gamma_k(x)_{\mathbb{X}}^\rho \frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{\rho}}\Big) \\ &\leq C(\|x\|_{\mathbb{X}} + \|x\|_{\mathbb{X}} N^\alpha) \leq CN^\alpha \|x\|_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

□

Teorema 3.5.2. *Supongamos que $\mathcal{B}=\{e_j\}_{j=1}^\infty$ es una base reticular en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Sean $\alpha>0$ y $0<q\leq\infty$ fijos. Entonces para cualquier sucesión creciente de números positivos y doblante $\{\eta(k)\}_{k=1}^\infty$, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe $C>0$ tal que para todo $N=1,2,3,\dots$ y $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$ tenemos*
$$\frac{1}{C}\eta(N)\leq\Big\|\sum_{k\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}}\Big\|_{\mathbb{X}}. \tag{3.36}$$

2. *(Desigualdad tipo Bernstein para $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$) : Existe $C_\alpha>0$ tal que*
$$\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}\leq C_\alpha N^\alpha\|x\|_{\mathbb{X}} \tag{3.37}$$
para todo $x\in\Sigma_N,\ N=1,2,3,\dots$

3. *$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$.*

4. *$\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$.*

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. Sea $x=\sum_{k\in\Gamma}c_ke_k\in\Sigma_N$. Para $m=1,2,3,\dots,N$ y π una biyección de $\mathbb{N}$ tal que $\|c_{\pi(k)}e_{\pi(k)}\|_{\mathbb{X}}$ es no creciente, usamos 1., (2.31) y la propiedad reticular de $\mathcal{B}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\|c_{\pi(m)}\mathbf{e}_{\pi(m)}\|_{\mathbb{X}}\eta(m) &\leq C\|c_{\pi(m)}e_{\pi(m)}\|_{\mathbb{X}}\Big\|\sum_{j=1}^m\frac{\mathbf{e}_{\pi(j)}}{\|\mathbf{e}_{\pi(j)}\|_{\mathbb{X}}}\Big\|_{\mathbb{X}}\\ &\leq C\Big\|\sum_{j=1}^m c_{\pi(j)}e_{\pi(j)}\Big\|_{\mathbb{X}}\leq C\|x\|_{\mathbb{X}}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

De (3.38) se obtiene

$$\begin{aligned}\|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} &= \Big[\sum_{m=1}^N(m^\alpha\eta(m)\|c_{\pi(m)}e_{\pi(m)}\|_{\mathbb{X}})^q\frac{1}{m}\Big]^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C\|x\|_{\mathbb{X}}\Big[\sum_{j=1}^N m^{\alpha q}\frac{1}{m}\Big]^{\frac{1}{q}}\approx\|x\|_{\mathbb{X}}N^\alpha.\end{aligned}$$

2. $\Longrightarrow$ 1. Para cualquier $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$, aplicamos nuestra hipótesis a $\widetilde{1}_\Gamma=\sum_{k\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}}$ y obtenemos:

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathbb{X}}\geq\frac{1}{C_{\alpha,q}}N^{-\alpha}\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}\gtrsim\eta(N)$$

donde en la última desigualdad usamos la Nota 3.3.4 y la parte (a) del Lema 3.3.5.

2. $\Longrightarrow$ 3. Ya hemos probado que 1. $\Longleftrightarrow$ 2.; puesto que 1. no depende de α, q, entonces en realidad 2. se verifica para todo $\tilde{\alpha} > 0$. En particular, de la Proposición 3.5.1 tenemos

$$\mathcal{A}^{\tilde{\alpha}}_{\rho}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\alpha}} := \ell^q_{k^{\tilde{\alpha}}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \tag{3.39}$$

para $\tilde{\alpha} \in \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}\right)$ y algún ρ suficientemente pequeño. Ahora, de la teoría general de aproximación desarrollada en [18], los espacios $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ satisfacen el teorema de reiteración para el método de interpolación real (ver Corolario 2.3.8), en particular

$$\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) = (\mathcal{A}^{\alpha_0}_{q_0}(\mathcal{B}, \mathbb{X}), \mathcal{A}^{\alpha_1}_{q_1}(\mathcal{B}, \mathbb{X}))_{\frac{1}{2},q}, \tag{3.40}$$

cuando $\alpha = \frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}$ con $\alpha_1 > \alpha_0 > 0$ y $q_0, q_1, q \in (0, \infty]$. Por otro lado, para la familia de espacios de Lorentz discretos con peso ℓ^q_ω se sabe que

$$(\ell^q_{\omega_0}, \ell^q_{\omega_1})_{\theta,q} = \ell^q_\omega, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < q \leq \infty, \tag{3.41}$$

con $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{W}_+$ y $\omega = \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}$ (ver por ejemplo [50] teorema 3). Por lo tanto, para α y q fijos podemos elegir los parámetros adecuados y usar la inclusión 3.39 para obtener

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \;&=\; (\mathcal{A}^{\alpha_0}_{\rho}(\mathcal{B}, \mathbb{X}), \mathcal{A}^{\alpha_1}_{\rho}(\mathcal{B}, \mathbb{X}))_{\frac{1}{2},q} \hookrightarrow (\ell^q_{k^{\alpha_0}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}), \ell^q_{k^{\alpha_1}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}))\\ &= \ell^q_{k^{\alpha}\eta(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del Teorema 5.6.1 de [4].

3. $\Longrightarrow$ 4. Se deduce de la inclusión $\mathscr{G}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$.

4. $\Longrightarrow$ 2. Se demuestra como la implicación 3. $\Longrightarrow$ 1. de la Proposición 3.5.1 usando (3.34).

$\square$

Nota 3.5.3. *Observe que las implicaciones* 3. $\Longrightarrow$ 4. $\Longrightarrow$ 2. $\Longleftrightarrow$ 1. *son ciertas con la hipótesis más débil* $\{k^{\alpha}\eta(k)\} \in \mathbb{W}$.

Las inclusiones en el Teorema 3.5.2 son óptimas en el sentido del siguiente corolario:

Corolario 3.5.4. *(**Inclusiones óptimas de** $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ **en** $\ell^q_\omega(\mathcal{B}, \mathbb{X})$) Sea $\mathcal{B}$ una base reticular en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$ fijos.*

(a) Si $h_l(N)$ es doblante, entonces

$$\mathscr{G}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^{\alpha}h_l(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}).$$

(b) Si para alguna sucesión $\omega \in \mathbb{W}$ tenemos $\mathcal{A}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_\omega(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ o $\mathscr{G}^{\alpha}_{q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_\omega(\mathcal{B}, \mathbb{X})$, entonces debemos tener necesariamente $\omega(k) \lesssim k^{\alpha}h_l(k)$ y por lo tanto,

$$\ell^q_{k^{\alpha}h_l(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_\omega(\mathcal{B}, \mathbb{X}).$$

Demostración. (a) Observe que si h_l es doblante, $k^\alpha h_l(N; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \in \mathbb{W}_+$, para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, la implicación 1. $\Longrightarrow$ 3. en el Teorema 3.5.2 prueba el resultado.

(b) Si $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{\omega(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ o $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{\omega(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X})$, entonces las implicaciones 3. $\Longrightarrow$ 4. $\Longrightarrow$ 1. prueban el resultado con $\eta(k) = \omega(k)/k^\alpha$ teniendo en cuenta la Nota 3.5.3.

□

3.6. Consecuencias sencillas

En esta sección detallamos consecuencias inmediatas de los resultados de las secciones 3.4 y 3.5. La primera de ellas se deduce de los Corolarios 3.4.5, 3.4.9 y 3.5.4 y la enunciamos como teorema para referencias futuras.

Teorema 3.6.1. *Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espacio cuasi-Banach con una base reticular $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$. Supongamos que $h_l(N)$ es doblante. Entonces, tenemos las siguientes inclusiones continuas:*

$$\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_l(k)}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \tag{3.42}$$

y estas inclusiones son las mejores posibles en la escala de los espacios de Lorentz discretos con peso en el sentido que se detalla en los Corolarios 3.4.5, 3.4.9 y 3.5.4.

El resto de los resultados que exponemos en esta sección son conocidos y los mostramos para que se aprecie la sencillez de las demostraciones usando los resultados de las secciones 3.4 y 3.5.

Sea $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Por el teorema de Plancherel, para todo $\Gamma \subset \mathbb{N}$ se tiene

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}}^2 = \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \mathbf{e}_k \Big\|_{\mathbb{X}}^2 = \sum_{k\in\Gamma} \|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{H}}^2 = |\Gamma|.$$

Así,

$$h_l(N; \mathcal{B}, \mathbb{H}) = h_r(N; \mathcal{B}, \mathbb{H}) = N^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

y del Teorema 3.6.1 se deduce

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{H}) = \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{H}) = \ell^{\tau,q}(\mathcal{B}, \mathbb{H}) \tag{3.44}$$

donde $\frac{1}{\tau} = \alpha + \frac{1}{2}$. Este resultado fue probado por S. B. Stechkin ([70]) para el caso $q = 2$ y para q general por R. DeVore y V.N. Temlyakov ([19]).

Sea $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ (ver Definición 2.4.2) para la que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}|\Gamma|^{\frac{1}{p}} \leq \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C|\Gamma|^{\frac{1}{p}} \tag{3.45}$$

para todo conjunto finito $\Gamma \subset \mathbb{N}$ y cualquier $p \in (0, \infty)$. Por tanto,

$$h_l(N; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \approx h_r(N; \mathcal{B}, \mathbb{X}) \approx N^{\frac{1}{p}} \tag{3.46}$$

y del Teorema 3.6.1 se deduce

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \;\; = \;\; \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) = \ell^{\tau,q}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \tag{3.47}$$

donde $\frac{1}{\tau} = \alpha + \frac{1}{p}$ y los espacios anteriores tienen las normas equivalentes. Estos resultados fueron probados G. Kerkyacharian y D. Picard en [41] (ver también [27]). En [41] cuando se cumple (3.45) se dice que $(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ satisface la propiedad p-Temlyakov, mientras que en [27] se dice que $(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ es un p-espacio.

Supongamos que la base incondicional $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ satisface que existen dos constantes $0 < A < B < \infty$ tal que cuando $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k \in \mathbb{X}$ tenemos

$$A\|\{c_k : k \in \mathbb{N}\}\|_{\ell^{q,\infty}} \leq \|x\|_{\mathbb{X}} \leq C\|\{c_k : k \in \mathbb{N}\}\|_{\ell^{p,1}} \tag{3.48}$$

para algunos valores $1 \leq p \leq q \leq \infty$. En [30] cuando se cumple (3.48) se dice que $(\mathcal{B}, \mathbb{X})$ tiene la propiedad sándwich (p, q). De (3.48) se deduce

$$A|\Gamma|^{\frac{1}{q}} \leq \Big\| \sum_{k\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq B'|\Gamma|^{\frac{1}{p}}, \tag{3.49}$$

por tanto, $h_r(N) \lesssim n^{\frac{1}{p}}$ y $h_l(N) \gtrsim N^{\frac{1}{q}}$, y del Teorema 3.6.1 obtenemos

$$\ell^{\tau_p,s}(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_s^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_s^\alpha(\mathcal{B}, \mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^{\tau_q,s}(\mathcal{B}, \mathbb{X}), \tag{3.50}$$

donde $\frac{1}{\tau_p} = \alpha + \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{\tau_q} = \alpha + \frac{1}{q}$. Las inclusiones anteriores fueron probadas por R. Gribonval y M. Nielsen en [30], teorema 3.1.

Capítulo 4

Funciones de democracia para bases de ondículas

A la vista de los resultados probados en las secciones 3.4 y 3.5 es claro que para obtener inclusiones óptimas para las clases $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ es necesario calcular (salvo constantes mutiplicativas) las funciones de democracia por la izquierda y por la derecha de la base $\mathcal{B}$ en un espacio $\mathbb{X}$.

Son conocidas las funciones de democracia de bases de ondículas apropiadas en los espacios de Triebel-Lizorkin (en particular en los espacios de Lebesgue, de Sobolev y de Hardy) y en los espacios de Orlicz. Ver detalles en la sección 4.1.2 en donde se recopilan los resultados conocidos junto con las referencias.

En este capítulo nos ocupamos de calcular (salvo constantes multiplicativas) las funciones de democracia de bases de ondículas apropiadas en espacios de Triebel-Lizorkin con peso (en particular Lebesgue, Sobolev y Hardy con peso), en espacios de Orlicz con peso, en espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, en espacios de Lorentz generalizados $\Lambda_w^q(\mathbb{R}^d) = \Lambda^q(w)$, en espacios de Besov con peso y en el espacio BMO. En cada caso se enunciarán las inclusiones que se deducen inmediatamente de los resultados de las secciones 3.4 y 3.5. Haremos también una breve descripción de los conceptos y resultados necesarios sobre bases de ondículas, así como de las propiedades de los pesos que usaremos en las demostraciones.

4.1. Preliminares

4.1.1. Bases de ondículas

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los cubos en $\mathbb{R}^d$ de la forma $Q_{j,k} = 2^{-j}([0,1)^d + k),\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^d$, de manera que $|Q_{j,k}| = 2^{-jd}$ y todos los cubos de un mismo nivel $j \in \mathbb{Z}$ son disjuntos.

Definición 4.1.1. *([46]) Una colección finita de funciones* $\Phi = \{\psi^1, \dots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ *se dice que es una* ***familia de ondículas*** *si el conjunto*

$$\mathcal{W} = \{\psi^l_{Q_{j,k}}(x) = 2^{\frac{jd}{2}} \psi^l(2^j x - k) : Q_{j,k} \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \dots, L\}$$

es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^d)$.

La definición dada aparece en [46]. El lector puede consultar las monografías [51, 14, 33] o [49] para conocer la forma de construir ondículas y sus numerosas aplicaciones. Una de ellas es la habilidad de las ondículas para aproximar señales y su capacidad para eliminar el ruido de ellas. La aproximación no lineal con N-términos es la forma de aproximar más usada en estos casos en su variante "thresholding".

A pesar de que la definición que hemos dado data de 1986 ([46]), ya en 1910 A. Haar ([34]) describió un sistema con tales propiedades. Si tomamos $h(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(x),\ x \in \mathbb{R}$, entonces el sistema $\mathcal{H} = \{h_I(x) : I \in \mathcal{D}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y se denomina **base de Haar**.

En dimensión d se procede de la siguiente manera. Sean $h^1(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(t)$ y $h^0(t) = \chi_{[0,1)}(t)$. Definir E como el conjunto de todos los $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ tal que $\varepsilon_j = 0$ ó 1 y no todos los $\varepsilon_j = 0$. El conjunto E tiene $2^d - 1$ elementos que se corresponden con los vértices de un cubo d-dimensional exceptuando el vértice $(0, \dots, 0)$. Para cada $\varepsilon \in E$ sea

$$h^\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^{d} h^{\varepsilon_j}(x_j).$$

La colección $\{h^\varepsilon : \varepsilon \in E\}$ es una familia de ondículas, denominada de Haar, ya que la colección

$$\mathcal{H} = \{h^\varepsilon_Q : Q \in \mathcal{D},\ \varepsilon \in E\}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Véanse las momografías [51, 14, 33] y [49] para la construcción de otras ondículas: Lemarié-Meyer, spline y las ondículas con soporte compacto de I. Daubechies ([15]).

Nos interesará en este capítulo qué condiciones sobre las ondículas (suavidad, cancelación o decaimiento) producen bases incondicionales de los espacios clásicos del análisis y cómo estos se pueden caracterizar usando los coeficientes de la base. En [51] esta caracterización se hace para ondículas que provienen de un Análisis Multirresolución r-regular (ver definición en la página 22 de [51]). Nosotros usaremos una condición de regularidad extraída de [45] (ver también [6, 7]) (en donde se dan caracterizaciones con sistemas más generales en espacios anisotrópicos) similar a las usadas en [33] en dimensión 1.

Definición 4.1.2. ***(Clases de regularidad)*** *Sea* r *un entero no negativo y* $M > d + r$. *La clase de regularidad* $\mathcal{R}^{r,M}$ *es el conjunto de todas las funciones* $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales* *que*

i) $\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha f(x)dx = 0 \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ 0 \leq |\alpha| \leq r$

ii) $|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^M}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^d$

iii) $|D^\alpha f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^M}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^d,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ 0 < |\alpha| \leq r+1$

Puede demostrarse que $ii)$ y $iii)$ implican $i)$ cuando $f = \psi$ es una ondícula ortonormal con $d = 1$ (ver Teorema 3.4 de [33]).

La familia de ondículas de Lemarié-Meyer son elementos de la clase de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ y por tanto también de $\mathcal{R}^{r,M}$ para todo r y M. Las ondículas spline ψ de orden r pertenecen a $\mathcal{R}^{r-2,M}$ para todo $M > 0$ si $r \geq 2$ (ya que decaen exponencialmente). Finalmente, las ondículas de soporte compacto de I. Daubechies con regularidad adecuada también pertenecen a $\mathcal{R}^{r,M}$.

Observar que las ondículas de Haar y la de Franklin (splines de orden 1) no pertenecen las clases de regularidad $\mathcal{R}^{r,M}$. Sin embargo, existen caracterizaciones con estas bases similares a las que mencionaremos a continuación (ver [51, 33, 14]).

Para los espacios de Lebesgue se tiene la siguiente caracterización. Sea $1 < p < \infty$ y $\Phi = \{\psi^1, \ldots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Definimos la función cuadrado

$$S(f)(x) = \Big[\sum_{i=1}^{L} \sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{1}{2}} |\langle f, \psi_Q^l\rangle| \chi_Q(x))^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Si $\Phi = \{\psi^l, \ldots, \psi^L\} \subset \mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$ se tiene que $f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 < p < \infty$, y $f = \sum_{l=1}^{L} \sum_{Q\in\mathcal{D}} \langle f, \psi_Q^l\rangle \psi_Q^l$ con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^d)$. Además se tiene la equivalencia

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \approx \|S(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{4.2}$$

(ver [33] para el caso $d = 1$ con una clase de regularidad un poco más restrictiva que $\mathcal{R}^{0,1}$ y [51] para el caso general). La equivalencia (4.2) también se cumple para el sistema de Haar (ver [75] para el caso $d = 1$). Observar que (4.2) prueba que el sistema de Haar en $\mathbb{R}^d$ es base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 < p < \infty$.

Otra gran familia de espacios de funciones que admite una caracterización con ondículas son los espacios de Besov. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 < \tau, q \leq \infty$ los espacios de Besov homogéneos $\dot{B}^\alpha_{\tau,q} := \dot{B}^\alpha_{\tau,q}(\mathbb{R}^d)$ se pueden definir usando descomposiciones de Littlewood-Paley (ver [23, 56] o sección 4.3 para más detalles).

Sea $\mathcal{J} = \frac{d}{\min\{1,p\}}$ y $\Phi = \{\psi^1, \ldots, \psi^L\} \subset \mathcal{R}^{r,M}$ con $r \geq \max\{\alpha, \mathcal{J} - d - \alpha\}$ y $M > \max\{\mathcal{J}, d + r\}$. Entonces, si $f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$,

$$f = \sum_{l=1}^{L} \sum_{Q \in \mathcal{D}} \langle f, \psi^l_Q \rangle \psi^l_Q$$

con convergencia en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ (y en $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ si $q \neq \infty$). Además,

$$\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \approx \Big[\sum_{l=1}^{L} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}} (|Q|^{-\frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} |\langle f, \psi^l_Q \rangle|)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.3}$$

Resultados similares se obtienen para los espacios de Besov no homogéneos $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, para los cuales es necesario hacer uso de una función de "escala" adicional ψ^0 (con las condiciones de regularidad (ii) y (iii) de $\mathcal{R}^{r,M}$) y usar cubos $Q \in \mathcal{D}^+ = \{Q \in \mathcal{D} : |Q| \leq 1\}$ (ver [45], Teorema 4.2 para más detalles).

Recordamos que los espacios de Besov $B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ son generalizaciones de los espacios de Lipschitz Λ_α y de las clases de Zygmund (ver [56] para más detalles).

Los espacios de Lebesgue, así como los de Sobolev y los de Hardy son casos particulares de la familia de espacios de Triebel-Lizorkin homogéneos $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Se definen usando descomposiciones de Littlewood-Paley (ver [22] o la sección 4.4 para más detalles). Observamos que $\dot{F}^0_{p,2}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\dot{F}^s_{p,2} \cap L^p(\mathbb{R}^d) = W^s_p(\mathbb{R}^d)$ (ver [22]), donde $W^s_p(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de Sobolev y se define como el conjunto de todas $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tales que la cantidad

$$\|f\|_{W^s_p(\mathbb{R}^d)} = \|[(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\cdot)]^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad 1 < p < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots$$

es finita. Las notaciones $\vee$ y $\wedge$ denotan, como de costumbre, la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier, respectivamente.

Sea $\mathcal{J} = \frac{d}{\min\{1,p,q\}}$ y $\Phi = \{\psi^1, \ldots, \psi^L\} \subset \mathcal{R}^{r,M}$ con $r \geq \max\{s, \mathcal{J} - d - s\}$ y $M > \max\{\mathcal{J}, d + r\}$. Entonces, si $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$,

$$f = \sum_{l=1}^{L} \sum_{Q \in \mathcal{D}} \langle f, \psi^l_Q \rangle \psi_Q$$

en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ (y en la cuasi-norma de $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ si $q \neq \infty$). Además, se tiene la equivalencia

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \approx \|S^s_q(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{4.4}$$

donde

$$S_q^s(f)(x) = \Big[\sum_{l=1}^{L}\sum_{Q\in\mathcal{D}}(|Q|^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{2}}|\langle f,\psi_Q^l\rangle|\chi_Q(x))^q\Big]^{\frac{1}{q}} \tag{4.5}$$

(ver [45], Teorema 4.1). De hecho, en [45] se consideran los espacios de Triebel-Lizorkin no homogéneos $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^d),\ s\in\mathbb{R},\ 0<p<\infty,\ 0<q\leq\infty$ y se obtiene una caracterización similar a (4.4) pero usando una función de "escala" adicional ψ^0 (con las condiciones de regularidad (ii) y (iii) de $\mathcal{R}^{r,M}$) y una función $S_q^{s,+}$ similar a (4.5) en la que solo intervienen los cubos de $\mathcal{D}^+ = \{Q\in\mathcal{D} : |Q|\leq 1\}$.

4.1.2. Resultados conocidos

El propósito de esta sección es informar al lector de manera breve y con las referencias adecuadas, sobre los resultados conocidos acerca de las funciones de democracia de algunos espacios de funciones.

Usando la caracterización con ondículas de los espacios de Sobolev $\dot{W}_p^s(\mathbb{R}^d),\ s\in\mathbb{R},\ 0<p<\infty$, C. Hsiao, B. Jawerth, B.J. Lucier, y X.M. Yu, probaron en [35] las equivalencias

$$h_r(N;\mathcal{W},\dot{W}_p^s(\mathbb{R}^d)) \approx h_l(N;\mathcal{W},\dot{W}_p^s(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{p}} \tag{4.6}$$

si $\mathcal{W}$ es una base de ondículas generada por la colección $\Phi = \{\psi^0,\dots,\psi^L\}\subset\mathcal{R}^{r,M}$ con $r\geq \text{máx}\{s,\mathcal{J}-d-s\}$ y $M>\text{máx}\{\mathcal{J},d+r\}$, donde $\mathcal{J}=\frac{d}{\text{mín}\{1,p\}}$.

Para los espacios de Triebel-Lizorkin homogéneos $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d),\ s\in\mathbb{R},\ 0<p<\infty,\ 0<q\leq\infty$, G. Garrigós y E. Hernández probaron en [27] que,

$$h_r(N;\mathcal{W},\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)) \approx h_l(N;\mathcal{W},\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{p}}, \tag{4.7}$$

donde $\mathcal{W}$ es una base de ondículas que satisface la caracterización usando la "función cuadrado" descrita en (4.4). Ver Teorema 4.4.8 para una extensión de estos resultados al caso $\dot{F}_{p,q}^s(w)$.

Las equivalencias (4.6), (4.7) y el Teorema 3.6.1 prueban que

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{W},\dot{W}_p^s(\mathbb{R}^d)) = \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{W},\dot{W}_p^s(\mathbb{R}^d)) = \ell^{\tau,q}(\mathcal{W},\dot{W}_p^s(\mathbb{R}^d)) \tag{4.8}$$

y

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{W},\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)) = \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{W},\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)) = \ell^{\tau,q}(\mathcal{W},\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)) \tag{4.9}$$

donde $\frac{1}{\tau}=\alpha+\frac{1}{p}$ (este resultado es el teorema 6.1 en [27]).

Usando la caracterización de los espacios de Besov homogéneos $\dot{B}^{\alpha}_{\tau,q}(\mathbb{R}^d)$ en (4.3) se deducen las identidades siguientes

$$\mathcal{A}_q^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{A}_q^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{B}^{\alpha}_{p,p}(\mathbb{R}^d)) = \dot{B}^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(\mathbb{R}^d), \text{ si } \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}. \tag{4.10}$$

Un resultado de P. Soardi ([69]) prueba que las bases de ondículas pertenecientes a la clase de regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$ son incondicionales en los espacios de Banach invariantes por reordenamiento con los índices de Boyd entre 0 y 1 y que además admiten una caracterización en términos de los coeficientes de ondículas. El resultado es también cierto para la ondícula de Haar.

Uno de los ejemplos de espacios de Banach invariante por reordenamiento, donde las bases de ondículas no son democráticas, son los espacios de Orlicz $L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)$. Usando la caracterización de estos espacios con ondículas, G. Garrigós, E. Hernández y J.M. Martell ([29]) obtuvieron el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} h_r(N; \mathcal{W}, L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)) &\approx \sup_{s>0} \frac{\varphi(Ns)}{\varphi(s)} := h^+_{\varphi}(N), \\ h_l(N; \mathcal{W}, L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)) &\approx \operatorname{ínf}_{s>0} \frac{\varphi(Ns)}{\varphi(s)} := h^-_{\varphi}(N) \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde φ es la función fundamental de $L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)$ (ver [29] para más detalles). Con este resultado se prueba en [29] (ver la demostración original en [77]) que las bases de ondículas son democráticas en $L^{\Phi}(\mathbb{R}^d)$ si sólo si $L^{\Phi}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ para algún $1 < p < \infty$.

A continuación mencionamos un ejemplo que involucra la base de Haar hiperbólica. Sea $h(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(t)$ la función de Haar en $\mathbb{R}$. Para $I \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ escribimos $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ y $h_I = 2^{\frac{n}{p}} h(2^n t - k)$. Para un rectángulo diádico $J = I_1 \times \ldots \times I_I \subset \mathbb{R}^d$ escribimos

$$h^{(d)}_J = h_{I_1}(t_1)...h_{I_d}(t_d) \subset \mathbb{R}^d.$$

Denotamos por $\mathcal{D}(d)$ el conjunto de todos rectángulos diádicos en $\mathbb{R}^d$. El sistema $\mathcal{B} = \{h^d_I\}_{I\in\mathcal{D}(d)}$ es una base ortogonal en $L^2(\mathbb{R}^d)$ normalizada en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Como hace P. Wojtaszczyk en [74], consideramos los espacios $H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < \infty$, definidos como el conjunto de todas las funciones $f = \sum_{I\in\mathcal{D}(d)} a_I h^{(d)}_I$ tales que

$$|||f|||_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}(d)} |a_I h^{(d)}_I(t)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} dt \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

P. Wojtaszczyk probó en [74] el siguiente resultado

a) Si $0 < p \le 2$,

$$h_l(N; \mathcal{B}, H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{p}} (\log N)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(d-1)} \text{ y } h_r(N; \mathcal{B}, H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{p}}. \tag{4.12}$$

b) Si $2 \le p < \infty$,

$$h_l(N;\mathcal{B},H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{p}} \text{ y } h_r(N;\mathcal{B},H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{p}}(\log N)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(d-1)}. \qquad (4.13)$$

Recordamos que para $1 < p < \infty$, $H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ y cuando $0 < p \le 1$ se tiene el espacio de Hardy $H^p_{dyad}(\mathbb{R}^d)$ diádico.

4.1.3. Resultados sobre pesos

El propósito de esta sección es recopilar los resultados sobre pesos que se usarán en el resto del capítulo. Para mayor detalle consultar [12].

Un peso w en $\mathbb{R}^d$ es una función definida en $\mathbb{R}^d$ tal que $0 < w(x) < \infty$ c.t. $x \in \mathbb{R}^d$ y localmente integrable. Escribiremos

$$\begin{aligned} \mathrm{W} &= \mathrm{W}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+ : w(x) > 0 \; c.t.p, \; w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \; y \\ & \int_{\mathbb{R}^d} w(x)dx = \infty \Big\} \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Decimos que w pertenece a la clase de Muckenhoupt A_p, $1 < p < \infty$ ($w \in A_p = A_p(\mathbb{R}^d)$), si existe una constante C_w tal que

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\Big)^{p-1} \le C_w, \qquad (4.15)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$, donde $|Q|$ denota la habitual medida de Lebesgue de Q. La condición A_1 se puede ver como el caso limite de la condición A_p para $p \downarrow 1$, es decir, se puede ver como

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big) ess_Q \sup(w^{-1}) \le C_w. \qquad (4.16)$$

La menor constante C_w para la cual vale cada una de estas desigualdades se conoce como la *constante* A_p del peso w. Se tiene que $A_1 \subset A_{p_1} \subset A_{p_2}$ si $1 < p_1 < p_2 < \infty$ (ver [12] teorema 1.14). Se define

$$A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p.$$

Para un peso $w(x)$ en $\mathbb{R}^d$, y un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$ escribimos

$$w(A) = \int_A w(x)dx.$$

La condición A_∞ se puede caracterizar de la forma siguiente: $w \in A_\infty$ si y sólo si existen $\delta > 0$ y $0 < C_w < \infty$ tales que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$

$$\frac{w(A)}{w(Q)} \le C_w\Big(\frac{|A|}{|Q|}\Big)^\delta, \quad \forall A \subset Q, \; A \; medible. \qquad (4.17)$$

(ver teorema 2.9, capítulo IV de [12]).

Para algunos de nuestros resultados bastará con suponer una condición más débil en la que se requiere solamente que (4.17) se cumpla para todo $Q' \subset Q$ con $Q' \in \mathcal{D}$. Así, definimos la clase A_∞^d como el conjunto de todos los pesos $w \in \mathbb{R}^d$ para los cuales existe $\delta > 0$ y $0 < C_w < \infty$ tales que para todo $Q \in \mathcal{D}$

$$\frac{w(Q')}{w(Q)} \leq C_w \Big(\frac{|Q'|}{|Q|}\Big)^\delta, \ \forall\, Q' \subset Q,\ Q' \in \mathcal{D}. \tag{4.18}$$

Cuando $w \in A_p,\ 1 \leq p < \infty$, existe $C_w,\ 0 < C_w < \infty$, tal que para todo $Q \subset \mathbb{R}^d$

$$C_w \Big(\frac{|A|}{|Q|}\Big)^p \leq \frac{w(A)}{w(Q)}, \quad \forall\, A \subset Q,\ A \textit{ medible} \tag{4.19}$$

(tomar $f(x) = \chi_A(x)$ en la parte (b) del teorema 2.1 del capítulo IV de [12]). En algunos de nuestros resultados bastará suponer la siguiente condición más débil: $w \in B_p^d,\ 1 \leq p < \infty$, si existe $C_w,\ 0 < C_w < \infty$, tal que para todo $Q \in \mathcal{D}$

$$C_w \Big(\frac{|Q'|}{|Q|}\Big)^p \leq \frac{w(Q')}{w(Q)}, \quad \forall\, Q' \subset Q, \quad Q' \in \mathcal{D}. \tag{4.20}$$

Definimos,

$$B_\infty^d := \cup_{p \geq 1} B_p^d.$$

Para uso futuro enunciamos y demostramos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.3. *Supongamos que un peso $w \in A_\infty^d \cap B_\infty^d$ (en particular si $w \in A_\infty$). Dado $\tau > 0$ existe una sucesión de cubos $\{R_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}$, disjuntos, tal que*

$$C\tau \leq w(R_j) \leq \tau, \quad \forall\, j = 1, 2, 3,$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de j y τ.

Para la demostración necesitaremos del siguiente resultado:

Lema 4.1.4. *Sea $w \in A_\infty^d(\mathbb{R}^d)$. Si $\{Q_k\}_{k=-\infty}^\infty$ es una familia de cubos diádicos tales que $Q_k \subset Q_{k+1}$ y $|Q_{k+1}| = 2^d |Q_k|$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} w(Q_k) = \infty \quad y \quad \lim_{k \longrightarrow -\infty} w(Q_k) = 0. \tag{4.21}$$

Demostración. Puesto que $w \in A_\infty^d$, si $k \geq 0$, usamos la relación (4.18) y obtenemos

$$\frac{w(Q_0)}{w(Q_k)} \leq C_w \Big(\frac{|Q_0|}{|Q_k|}\Big)^\delta = C_w \Big(\frac{1}{2^{kd}}\Big)^\delta.$$

Por lo tanto, $w(Q_k) \geq (C_w)^{-1}2^{kd\delta}w(Q_0)$ y $\lim_{k\longrightarrow\infty} w(Q_k) = \infty$. Por el otro lado, si $k \leq 0$, por (4.18) obtenemos

$$\frac{w(Q_k)}{w(Q_0)} \leq C_w\Big(\frac{|Q_k|}{|Q_0|}\Big)^\delta = C_w 2^{kd\delta}.$$

Entonces tenemos, $w(Q_k) \leq C_w 2^{kd\delta}w(Q_0)$ y $\lim_{k\longrightarrow-\infty} w(Q_k) = 0$.

□

Demostración. (**Demostración de la Proposición 4.1.3**)
Sea $Q_k = [0, 2^k)^d,\ k \in \mathbb{Z}$. Por el Lema 4.1.4 existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w(Q_{k_1}) \leq \tau < w(Q_{k_1+1}). \tag{4.22}$$

Escogemos $R_1 = Q_{k_1}$. Tenemos

$$w(R_1) = w(Q_{k_1}) \leq \tau.$$

Por otro lado, de la condición B_p^d (ver (4.20)) obtenemos

$$\frac{w(Q_{k_1})}{w(Q_{k_1+1})} \geq C_w\Big(\frac{|Q_{k_1}|}{|Q_{k_1+1}|}\Big)^p = C_w 2^{-dp},$$

de modo que

$$w(R_1) = w(Q_{k_1}) \geq C_w 2^{-dp}w(Q_{k_1+1}) > C_w 2^{-dp}\tau.$$

Por lo tanto, podemos tomar $C = C_w 2^{-dp}$ en este primer paso.

Supongamos que elegimos una colección de cubos disjuntos $R_1, \ldots, R_{m-1}$ tales que $C\tau < w(R_j) \leq \tau$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que todos los cubos R_j están en el cono positivo de $\mathbb{R}^d$, es decir, el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^d$ con coordenadas no negativas.

Elegimos $Q_0 = 2^{k_m}[0, 1)^d,\ k_m \in \mathbb{Z}$ tal que $R_j \subset Q_0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Consideramos la familia de cubos diádicos creciente dada por $Q_k = 2^{k_m+k}[0, 1)^d,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Sea $\widetilde{Q}_k,\ k = 1, 2, \ldots$, un cubo diádico contenido en Q_k tal que $|\widetilde{Q}_k| = \frac{|Q_k|}{2^d}$ y $\tilde{Q}_k \cap Q_{k-1} = \emptyset$. Si $w(\tilde{Q}_k) \leq \tau$ para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$ como $w \in B_p^d$ obtenemos:

$$\frac{w(\tilde{Q}_k)}{w(Q_k)} \geq C_w\Big(\frac{|\tilde{Q}_k|}{|Q_k|}\Big)^p = C_w 2^{-dp}.$$

Por lo tanto, $w(Q_k) \leq (C_w)^{-1}2^{dp}\tau$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ contradiciendo el Lema 4.1.4. Por tanto, existe un $k_m^0 \in \mathbb{Z}$ tal que $w(\widetilde{Q}_{k_m^0}) > \tau$. Ahora consideramos una familia de los descendientes del cubo diádico $\widetilde{Q}_{k_m^0}$. Por el Lema 4.1.4 existen $\widetilde{Q}_{k_m} \supset \widetilde{\widetilde{Q}}_{k_m}$ tal que

$$w(\widetilde{\widetilde{Q}}_{k_m}) \leq \tau < w(\widetilde{Q}_{k_m}) \tag{4.23}$$

y $|\widetilde{\widetilde{Q}}_{k_m}| = \frac{|\widetilde{Q}_{k_m}|}{2^d}$. Elegimos $R_m = \widetilde{\widetilde{Q}}_{k_m}$. Puesto que (4.23) es la misma relación que (4.22), entonces se tiene que

$$C_w 2^{-dp}\tau < w(R_m) \leq \tau.$$

Observe que R_m ha sido elegido en el cono positivo de $\mathbb{R}^d$ y disjunto con $R_1, \ldots, R_{m-1}$. □

También haremos uso del siguiente resultado.

Lema 4.1.5. *Sea $w \in A_r$ un peso en $\mathbb{R}^d$ con $r \geq 1$. Sean $0 < \delta < 1$ y $u(x) = w(x)^\delta$. Se tiene que $u \in A_r$ y $w_Q \approx (u_Q)^{\frac{1}{\delta}}$, donde*

$$w_Q = \frac{1}{|Q|} w(Q) = \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx.$$

Demostración. Cuando $r > 1$, puesto que $w \in A_r$ y $0 < \delta < 1$, usando la desigualdad de Jensen tenemos

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q u^{1-r'}(x)dx\Big)^{r-1} \\
&= \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^\delta dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\delta(1-r')}dx\Big)^{r-1} \\
&\leq \Big[\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-r'}dx\Big)^{r-1}\Big]^\delta \leq C_w^\delta.
\end{aligned}$$

Así, $u \in A_r$. Ahora vamos a probar la equivalencia $w_Q \approx (u_Q)^{\frac{1}{\delta}}$. Usando la desigualdad de Jensen con $\delta < 1$, tenemos

$$(u_Q)^{\frac{1}{\delta}} = \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^\delta dx\Big)^{\frac{1}{\delta}} \leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big) = w_Q.$$

La función $h(t) = t^{-(r-1)\delta}$, $t > 0$, es convexa; usando de nuevo la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-r'}(x)dx\Big)^{-(r-1)\delta} \leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q [w(x)]^\delta dx\Big) = u_Q.$$

De la condición $w \in A_r$ se tiene

$$w_Q = \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big) \leq C_w\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-r'}(x)dx\Big)^{-(r-1)} \leq C(u_Q)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Para $r = 1$, por un lado, puesto que $w \in A_1$, para casi todo $x \in Q$, usando de nuevo la desigualdad de Jensen se obtiene

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)dx\Big) = \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^\delta(x)dx\Big) \leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\Big)^\delta \leq Cw(x)^\delta = Cu(x).$$

Por tanto, $u \in A_1$. Por otro lado, podemos usar de nuevo la desigualdad de Jensen para obtener $(u_Q)^{\frac{1}{\delta}} \leq w_Q$. Además la condición $w \in A_1$ implica que

$$\begin{aligned} w_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx &\leq Cess_Q \operatorname{ínf} w = C(ess_Q \operatorname{ínf} u)^{\frac{1}{\delta}} \\ &\leq C\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)dx\Big)^{\frac{1}{\delta}} = C(u_Q)^{\frac{1}{\delta}}. \end{aligned}$$

□

4.1.4. Espacios de sucesiones

Hemos visto en la subsección 4.1.1 que muchos espacios de funciones clásicos del Análisis pueden caracterizarse imponiendo que una expresión que envuelve la sucesión de los coeficientes de ondículas sea finita (ver (4.2), (4.3) y (4.4)). Dicho de otra manera, los coeficientes pertenecen a un determinado espacio de sucesiones. Como se muestra en la sección 6.2 de [27] el "marco de transferencia abstracto" allí descrito permite deducir resultados sobre aproximación en espacios de funciones a partir de los correspondientes resultados para espacios de sucesiones. En esta sección recopilamos las definiciones y resultados sobre el tipo de espacios de sucesiones que usaremos.

Sea $\mathfrak{s}$ un espacio vectorial formado por sucesiones de números complejos $\mathbf{s} = \{s_I\}_{\mathcal{I}}$ definidos sobre un conjunto (fijo) numerable de índices $\mathcal{I}$. (En nuestras aplicaciones $\mathcal{I}$ será el conjunto de todos los cubos diádicos $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^d$ o várias cópias de $\mathcal{D}$ o bien el conjunto $\mathcal{D}^+ = \{Q \in \mathcal{D} : |Q| \leq 1\}$). Para cada $I \in \mathcal{I}$ escribimos $\mathbf{e}_I$ para denotar la sucesión que vale 1 en la posición I y cero en el resto. En todo este capítulo supondremos que $\mathfrak{s}$ es un espacio cuasi-Banach dotado de una cuasi-norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{s}}$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) Toda combinación lineal de elementos $\mathbf{e}_I$ pertenece a $\mathfrak{s}$;

(b) Si $\mathbf{t} \in \mathfrak{s}$ y $|s_I| \leq |t_I| \quad \forall\ I \in \mathcal{I}$, entonces $\mathbf{s} = \{s_I\}_{I\in\mathcal{I}} \in \mathfrak{s}$ y se tiene $\|\{s_I\}\|_{\mathfrak{s}} \leq \|\{t_I\}\|_{\mathfrak{s}}$;

(c) Si $\mathbf{s} \in \mathfrak{s}$, entonces $\operatorname{lím}_{k\longrightarrow\infty} \|s_{I_k}\mathbf{e}_{I_k}\|_{\mathfrak{s}} = 0$ para alguna ordenación del conjunto $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$.

Se deduce fácilmente de (b) que $\|\{s_I\}\|_{\mathfrak{s}} = \|\{|s_I|\}\|_{\mathfrak{s}}$ para toda $\mathbf{s} = \{s_I\}_{I\in\mathcal{I}} \in \mathfrak{s}$. En particular, si $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_I\}_{I\in\mathcal{I}}$ es base de Schauder de $\mathfrak{s}$ entonces es incondicional (de hecho reticular debido a (b)). Los conceptos de error de aproximación, algoritmo avaricioso, espacios de aproximación y clases avariciosas pueden definirse para la base $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_I\}_{I\in\mathcal{I}}$ copiando las correspondientes definiciones dadas en las secciones 3.1 y 3.2. Observamos que el teorema 2.1 de [27] prueba que en este contexto la base $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_I\}_{I\in\mathcal{I}}$ es avariciosa si y sólo si es democrática en $\mathfrak{s}$.

Si $\mathbf{s} = \{s_I\}_{I\in\mathcal{I}} \in \mathfrak{s}$, la propiedad (c) nos permite encontrar una ordenación del conjunto $\mathcal{I} = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|s_{I_1}\mathbf{e}_{I_1}\|_{\mathfrak{s}} \geq \|s_{I_2}\mathbf{e}_{I_2}\|_{\mathfrak{s}} \geq \|s_{I_3}\mathbf{e}_{I_3}\|_{\mathfrak{s}} \geq \dots, \tag{4.24}$$

esto es, un reordenamiento no creciente de $\{\|s_I e_I\|_{\mathfrak{s}}\}$.

En la siguiente definición (similar a la Definición 3.3.2) hacemos uso de los **espacios de Lorentz discretos con peso** ℓ^q_η definidos en la sección 3.3 cuando $\eta \in \mathbb{W}$, cuya definición invitamos al lector a repasar en la sección mencionada.

Definición 4.1.6. *Sea* $(\mathfrak{s}, \|\cdot\|_{\mathfrak{s}})$ *un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a), (b) y (c). Para* $0 < q \leq \infty$ *y* $\eta \in \mathbb{W}$ *definimos*

$$\ell^q_\eta(\mathfrak{s}) := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^I : \{\|s_I \boldsymbol{e}_I\|_{\mathfrak{s}}\} \in \ell^q_\eta\}$$

con

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\ell^q_\eta(\mathfrak{s})} := \Big[\sum_{k=1}^{\infty}(\eta(k)\|s_{I_k}\boldsymbol{e}_{I_k}\|_{\mathfrak{s}})^q \frac{1}{k}\Big]^{\frac{1}{q}} \quad (si\ q < \infty)$$

y

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\ell^\infty_\eta(\mathfrak{s})} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \eta(k)\|s_{I_k}\boldsymbol{e}_{I_k}\|_{\mathfrak{s}}$$

donde $\|s_{I_k}\boldsymbol{e}_{I_k}\|_{\mathfrak{s}}$ *están ordenados como en (4.24).*

Los espacios $\ell^q_\eta(\mathfrak{s})$ son espacios cuasi-Banach isométricamente isomorfos a $\ell^q_\eta(\mathcal{I})$. Del Lema 3.3.5 deducimos:

Lema 4.1.7. *Sea* $(\mathfrak{s}, \|\cdot\|_{\mathfrak{s}})$ *un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a), (b) y (c).*

(i) Si $\eta \in \mathbb{W}$, $\quad \Big\| \sum_{I\in\Gamma} \frac{e_I}{\|e_I\|_{\ell^\infty_\eta(\mathfrak{s})}} \Big\|_{\ell^\infty_\eta(\mathfrak{s})} \approx \eta(|\Gamma|)$

(ii) Si $\eta \in \mathbb{W}_+$, $\quad \Big\| \sum_{I\in\Gamma} \frac{e_I}{\|e_I\|_{\ell^q_\eta(\mathfrak{s})}} \Big\|_{\ell^q_\eta(\mathfrak{s})} \approx \eta(|\Gamma|).$

Supondremos que el espacio de sucesiones $\mathfrak{s}$ satisface también

(d) $\mathfrak{s} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ esto es, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}^{(n)} = \mathbf{s}$ (en $\mathfrak{s}$) $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_I^{(n)} = s_I\ \forall I \in \mathcal{I}$.

Los resultados siguientes muestran que los espacios de sucesiones $\mathfrak{s}$ que satisfacen (a), (b), (c) y (d) incluyen y pueden incluirse de manera continua en los espacios de la forma $\ell^q_\eta(\mathfrak{s})$ para sucesiones η apropiadas.

Proposición 4.1.8. *Sea* $(\mathfrak{s}, \|\cdot\|_{\mathfrak{s}})$ *un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a),(b),(c) y (d). Sea* $\eta \in \mathbb{W}$. *Son equivalentes*

i) Existe $C > 0$ *tal que* $\frac{1}{C}\eta(|\Gamma|) \leq \Big\| \sum_{I\in\mathcal{I}} \frac{e_I}{\|e_I\|_{\mathfrak{s}}} \Big\|_{\mathfrak{s}} \quad \forall\ \Gamma$ *finito.*

ii) $\mathfrak{s} \hookrightarrow \ell^\infty_\eta(\mathfrak{s})$.

Demostración. $ii) \Longrightarrow i)$ se deduce de la parte (a) del Lema 4.1.7. Para probar que $i) \Longrightarrow ii)$ observar que

$$\|\mathbf{s}\|_{\ell^\infty_\eta(\mathfrak{s})} = \sup_{\lambda>0} \lambda\eta(|\{I \in \mathcal{I} : \|s_I \mathbf{e}_I\|_{\mathfrak{s}} \geq \lambda\}|). \tag{4.25}$$

Dada $\mathbf{s} \in \mathfrak{s}$ y $\lambda > 0$ sea $\Gamma_\lambda = \{I \in \mathcal{I} : \|s_I \mathbf{e}_I\|_{\mathfrak{s}} \geq \lambda\}$. Entonces

$$\lambda \frac{1}{C}\eta(|\Gamma_\lambda|) \leq \Big\| \sum_{I \in \Gamma_\lambda} s_I \mathbf{e}_I \Big\|_{\mathfrak{s}} \leq \|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}}$$

debido a $i)$ y a la propiedad (b) del espacio $\mathfrak{s}$. El resultado se obtiene tomando el supremo sobre todos los $\lambda > 0$. □

Proposición 4.1.9. *Sea* $(\mathfrak{s}, \|\cdot\|_{\mathfrak{s}})$ *un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a), (b), (c) y (d). Sea* $\eta \in \mathbb{W}_+$. *Son equivalentes*

i) Existe $C > 0$ *tal que* $\Big\| \sum_{I \in \mathcal{I}} \frac{e_I}{\|e_I\|_{\mathfrak{s}}} \Big\|_{\mathfrak{s}} \leq C\eta(|\Gamma|) \quad \forall\, \Gamma \subset \mathcal{I}$ *finito.*

ii) $\ell^\rho_\eta(\mathfrak{s}) \hookrightarrow \mathfrak{s}$, *donde* $\rho = \rho(\mathfrak{s})$ *es el exponente de la* ρ*-desigualdad triangular de* $\mathfrak{s}$.

Demostración. $ii) \Longrightarrow i)$ es consecuencia de la parte (ii) del Lema 4.1.7. Para demostrar $i) \Longrightarrow ii)$ sea $\mathbf{s} = \{s_I\}_{I\in\mathcal{I}} \in \ell^\rho_\eta(\mathfrak{s})$ y definimos $\mathbf{s}^{(j)} = \sum_{1\leq k<2^j} s_{I_k}\mathbf{e}_{I_k}$ usando el reordenamiento no creciente como en (4.24). Probaremos que $\{\mathbf{s}^{(j)}\}_{j=1}^\infty$ converge a $\mathbf{s}$ en $\mathfrak{s}$. De hecho, por la ρ-desigualdad triangular de $\mathfrak{s}$, la propiedad (b) y la hipótesis $i)$ se obtiene

$$\|\mathbf{s}^{(j+m)} - \mathbf{s}^{(j)}\|^\rho_{\mathfrak{s}} \leq \sum_{l=j}^{j+m-1} \Big\| \sum_{2^l \leq k < 2^{l+1}} s_{I_k}\mathbf{e}_{I_k} \Big\|^\rho_{\mathfrak{s}} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{l=j}^{j+m-1} \|s_{I_{2^l}}\mathbf{e}_{I_{2^l}}\|^\rho_{\mathfrak{s}}(\eta(2^l))^\rho \leq C\sum_{l=0}^{\infty}(\eta(2^l)\|s_{I_{2^l}}\mathbf{e}_{I_{2^l}}\|_{\mathfrak{s}})^\rho \\ &\leq C\|\mathbf{s}\|^\rho_{\ell^\rho_\eta(\mathfrak{s})} \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde hemos usado en la última desigualdad la caracterización diádica de la cuasi-norma en $\ell^\rho_\eta(\mathfrak{s})$ que se obtiene como en el Lema 3.3.1. Se deduce de (4.27) que $\{\mathbf{s}^{(j)}\}_{j=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathfrak{s}$ y puesto que $\mathfrak{s} \hookrightarrow \mathbb{C}^I$ debe converger a $\mathbf{s}$. Poniendo $j = 0$ en (4.26) y haciendo que $m \longrightarrow \infty$ se obtiene

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}} \leq \lim_{m\longrightarrow\infty} \|s^{(m)}\|_{\mathfrak{s}} \leq C\|\mathbf{s}\|_{\ell^\rho_\eta(\mathfrak{s})}.$$

□

Nota 4.1.10. *Observar que la demostración de i) $\Longrightarrow$ ii) no requiere $w \in \mathbb{W}_+$ si no solamente $\eta \in \mathbb{W}$.*

Corolario 4.1.11. *Sea $(\mathfrak{s}, \|\cdot\|_{\mathfrak{s}})$ un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a), (b), (c) y (d). Si $h_l(N) := h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s})$ es doblante se tiene*

$$\ell^{\rho}_{h_r}(\mathfrak{s}) \hookrightarrow \mathfrak{s} \hookrightarrow \ell^{\rho}_{h_l}(\mathfrak{s})$$

donde $\rho = \rho(\mathfrak{s})$ es el exponente de la ρ-desigualdad triangular de $\mathfrak{s}$.

Corolario 4.1.12. *Sea $(\mathfrak{s}, \|\cdot\|_{\mathfrak{s}})$ un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a), (b), (c) y (d). Se tiene*

$$\ell^{q}_{\eta}(\mathfrak{s}) = \{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{s} : \{\|s_I \boldsymbol{e}_I\|_{\mathfrak{s}}\} \in \ell^{q}_{\eta}\}$$

si, o bien

i) $\exists\ \alpha > 0$ tal que $\eta(k) \gtrsim h_r(k)k^{\alpha}\quad \forall k > 0$ y $0 < q \leq \infty$

o bien

ii) $\eta(k) \gtrsim h_r(k)$ y $0 < q \leq \rho$, donde ρ es el exponente de la ρ-desigualdad triangular de $\mathfrak{s}$.

Demostración. Este Corolario es una consecuencia de la Proposición 4.1.9 junto con las inclusiones $\ell^q_\eta \hookrightarrow \ell^\rho_{h_r}$ si $0 < q \leq \infty$ en el caso i) y $\ell^q_\eta \hookrightarrow \ell^\rho_{h_r}$ si $0 < q \leq \rho$ en el caso ii). $\square$

Dos familias de espacios de sucesiones relacionados con ondículas y que satisfacen las propiedades requeridas en esta sección son las asociadas con espacios de Triebel-Lizorkin y de Besov.

Para los espacios de Triebel-Lizorkin homogéneos (ver (4.4)) se define el espacio de sucesiones $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,q},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$ como el conjunto de sucesiones $\mathbf{s} = \{s_Q \subset \mathbb{C}^{\mathcal{I}}\}$ tal que

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,q}} = \Big\|\Big[\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{2}}|s_Q|\chi_Q(\cdot))^q\Big]^{\frac{1}{q}}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \infty \tag{4.28}$$

con la modificación usual si $q = \infty$. Es claro que $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,q}$ es un espacio cuasi-Banach de sucesiones que satisface (a), (b), (c) y (d). En [27] se prueba $h_l(N) \approx h_r(N) \approx N^{\frac{1}{p}}$ y de la Proposición 4.1.8 se obtiene $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,q} \hookrightarrow \ell^{p,\infty}(\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,q})$, lo que prueba (c). Cuando $q < \infty$, $\mathcal{B}_c = \{e_Q\}_{Q\in\mathcal{D}}$ es una base de $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,q}$.

Para los espacios de Besov (ver (4.3)) se define el espacio de sucesiones $\mathfrak{s}\dot{B}^{\alpha}_{p,q},\ 0 < p \leq \infty,\ 0 < q \leq \infty$ como el conjunto de sucesiones $\mathbf{s} = \{s_Q\} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ tal que

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\alpha}_{p,q}} = \Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}} (|Q|^{-\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|s_Q|)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{4.29}$$

con las modificaciones usuales cuando $p = q = \infty$. En este caso (ver sección 4.3), $h_l(k) = \min\{k^{\frac{1}{p}}, k^{\frac{1}{q}}\} \in \mathbb{W}_+$ y por lo tanto se pueden aplicar los mismos comentarios que en el caso anterior de los espacios de Triebel-Lizorkin.

En secciones posteriores se darán ejemplos similares en donde se usarán pesos en $\mathbb{R}^d$ y funciones que sustituyen a las potencias $|Q|^{-\frac{\alpha}{d}}$. Ver detalles en las secciones 4.3 y 4.4.

4.2. El sistema de Haar en $L^p(w),\ 1 < p < \infty$

En esta sección presentamos una prueba de que el sistema de Haar en $\mathbb{R}^d$ es democrático en los espacios de Lebesgue con peso $L^p(w),\ 1 < p < \infty$. Esta demostración se hace sin recurrir a la caracterización de $L^p(w)$ en términos de coeficientes de ondículas (como es habitual hacer cuando $w = 1$ (ver [35])).

4.2.1. Funciones de democracia

Recordamos la definición del sistema de Haar en $\mathbb{R}^d$ dada en la sección 4.1.1. Sean $h^0(t) = \chi_{[0,1)}(t)$ y $h^1(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(t)$. Definir E como el conjunto de todas las sucesiones $\varepsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$ tales que $\epsilon_j = 0$ ó 1 y no todos los $\epsilon_j = 0$. Para cada $\varepsilon \in E$ sea

$$h^\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^{d} h^{\epsilon_j}(x_j).$$

La colección $\mathcal{H} = \{h_Q^\varepsilon : Q \in \mathcal{D},\ \varepsilon \in E\}$ (donde $h_{Q_{j,k}}(x) = |Q_{j,k}|^{-\frac{1}{2}} h(2^j x - k)$) es el **sistema de Haar** en $\mathbb{R}^d$, normalizado en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lema 4.2.1. *Sean* $1 \le p < \infty$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}^d$ *tal que* $w \in A_\infty^d$ *(ver 4.18). Entonces existe una constante* $0 < C_{p,d} < \infty$ *tal que*

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q}{\|h_Q\|_{L^p(w)}} \Big\|_{L^p(w)} \le C_{p,d} |\Gamma|^{\frac{1}{p}} \tag{4.30}$$

para todo $\Gamma \subset \prod_{\varepsilon\in E} \mathcal{D}_\varepsilon$ *(2^{d-1} copias de $\mathcal{D}$) finito.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon \in E$ y comencemos suponiendo que $\Gamma \subset \mathcal{D}_\varepsilon$. Tenemos

$$\|h_Q^\varepsilon\|_{L^p(w)} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |h_Q^\varepsilon(x)|^p w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}} = w(Q)^{\frac{1}{p}} |Q|^{-\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q^\varepsilon}{\|h_Q^\varepsilon\|_{L^p(w)}} \Big\|_{L^p(w)} &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q^\varepsilon(x)}{w(Q)^{\frac{1}{p}} |Q|^{-\frac{1}{2}}} \Big|^p w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big[\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{1}{p}}} \Big]^p w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dado $x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q$ sea Q_x el cubo más pequeño de Γ que contiene a x. Existe una sucesión de cubos diádicos $Q_x = Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \dots Q_j \subset \dots$ tal que $|Q_j| = 2^j|Q_x|$. Entonces tenemos

$$\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{1}{p}}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_j)^{\frac{1}{p}}}.$$

Usando (4.18) obtenemos

$$\frac{w(Q_x)}{w(Q_j)} \leq C_w\Big(\frac{|Q_x|}{|Q_j|}\Big)^{\delta} = C_w 2^{-j\delta}.$$

Es decir, $w(Q_j) \geq \frac{1}{C_w} 2^{j\delta} w(Q_x)$. Por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{1}{p}}} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}} C_w^{\frac{1}{p}} 2^{-j\delta/p} \leq C_p \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq C_p\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)}\Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde la última desigualdad es debida a que la última suma contiene el término $\frac{\chi_{Q_x}}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}}$. Sustituyendo (4.32) en (4.31) se obtiene

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q^{\varepsilon}}{\|h_Q^{\varepsilon}\|_{L^p(w)}} \Big\|_{L^p(w)} \leq C\Big[\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)}\Big) w(x)dx\Big]^{\frac{1}{p}} = C_p|\Gamma|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.33}$$

Si $\Gamma \subset \prod_{\varepsilon\in E} \mathcal{D}_\varepsilon$ escribir $\Gamma_\varepsilon = \{Q \in \Gamma : Q \in \mathcal{D}_\varepsilon\}$ de manera que $|\Gamma| = \sum_{\varepsilon\in E} |\Gamma_\varepsilon|$. Aplicando (4.33) a cada $\varepsilon \in E$ se tiene

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q}{\|h_Q\|_{L^p(w)}} \Big\|_{L^p(w)} \leq C_p \sum_{\varepsilon\in E} |\Gamma_\varepsilon|^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,d}|\Gamma|^{\frac{1}{p}}$$

con $C_{p,d} \leq 2^{2^d(1-\frac{1}{p})} C_p$.

□

El siguiente Lema proporciona la desigualdad contraria a (4.30) usando un argumento de dualidad cuando $1 < p < \infty$.

Lema 4.2.2. *Supongamos que para todo $q \in (1, \infty)$ se verifica (4.30). Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$ (ver definición en la sección 4.1.3) tenemos,*

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q}{\|h_Q\|_{L^p(w)}} \Big\|_{L^p(w)} \geq \frac{C_w}{C_{p',d}} |\Gamma|^{\frac{1}{p}} \tag{4.34}$$

para todo $\Gamma \subset \prod_{\varepsilon\in E} \mathcal{D}_\varepsilon$ finito.

Demostración. Dada $f \in L^p(w)$ por dualidad tenemos

$$\|f\|_{L^p(w)} = \sup\Big\{\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx\Big| : \|g\|_{L^{p'}(w^{-\frac{p'}{p}})} \leq 1, g \neq 0\Big\}. \tag{4.35}$$

Puesto que $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$, se deduce inmediatamente que $w^{-\frac{p'}{p}} \in A_{p'}(\mathbb{R}^d)$.
Sea

$$g(x) = \frac{1}{C_{p'}|\Gamma|^{\frac{1}{p'}}} \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q(x)}{\|h_Q(x)\|_{L^{p'}(w^{-\frac{p'}{p}})}}.$$

Usando nuestra hipótesis para $q = p'$ y $w^{\frac{-p'}{p}} \in A_{p'}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^{p'}(w^{-\frac{p'}{p}})} &= \Big\|\frac{1}{C_{p'}|\Gamma|^{\frac{1}{p'}}} \sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q(x)}{\|h_Q(x)\|_{L^{p'}(w^{-\frac{p'}{p}})}}\Big\|_{L^{p'}(w^{-\frac{p'}{p}})} \\ &\leq \frac{1}{C_{p'}|\Gamma'|^{\frac{1}{p'}}} C_{p'}|\Gamma|^{\frac{1}{p'}} = 1.\end{aligned}$$

De (4.35) deducimos

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q}{\|h_Q\|_{L^p(w)}}\Big\|_{L^p(w)} \geq \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q(x)}{|Q|^{-\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{p}}}\Big) g(x)dx\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q(x)}{|Q|^{-\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{p}}}\Big) \frac{1}{C_{p'}|\Gamma|^{\frac{1}{p'}}} \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q(x)}{|Q|^{-\frac{1}{2}} [w^{-\frac{p'}{p}}(Q)]^{\frac{1}{p'}}}\Big)\Big| dx \\ &= \frac{1}{C_{p'}|\Gamma|^{\frac{1}{p'}}} \sum_{Q\in\Gamma} \frac{1}{w(Q)^{\frac{1}{p}} [w^{-\frac{p'}{p}}(Q)]^{\frac{1}{p'}}} \int_{\mathbb{R}} \chi_Q(x)dx \\ &= \frac{1}{C_{p'}|\Gamma|^{\frac{1}{p'}}} \sum_{Q\in\Gamma} \frac{|Q|}{w(Q)^{\frac{1}{p}} [w^{-\frac{p'}{p}}(Q)]^{\frac{1}{p'}}}\end{aligned}$$

De (4.15) (subsección 4.1.3), se obtiene

$$w(Q)^{\frac{1}{p}} [w^{-\frac{p'}{p}}(Q)]^{\frac{1}{p'}} = \Big(\int_Q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_Q w^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq C_w|Q|.$$

Entonces,

$$\Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{h_Q}{\|h_Q\|_{L^p(w)}\|}\Big\|_{L^p(w)} \geq \frac{C_w}{C_{p'}} \frac{|\Gamma|}{|\Gamma|^{\frac{1}{p'}}} = \frac{C_w}{C_{p',d}} |\Gamma|^{\frac{1}{p}}.$$

□

Observando que cuando $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$ se satisface (4.18), de los Lemas 4.2.1 y 4.2.2 se deduce el resultado siguiente:

Teorema 4.2.3. *Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$. Para el sistema de Haar $\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}^d$ se tiene*

$$h_l(N; \mathcal{H}, L^p(w)) \approx h_r(N; \mathcal{H}, L^p(w)) \approx N^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto, el sistema de Haar es democrático en $L^p(w)$, con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

4.2.2. Contraejemplo

En esta subsección mostraremos que el Lema 4.2.2 no es válido si no se cumple la condición $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 4.2.4. *El lema 4.2.2 no es válido cuando $w \notin A_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$.*

Demostración. Consideramos el caso $d = 1$ y sea $w(x) = p|x|^{p-1} \notin A_p(\mathbb{R})$. Sea $I_j = [0, \frac{1}{2^j})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Observe que

$$w(I_j) = \int_0^{\frac{1}{2^j}} px^{p-1}dx = \frac{1}{2^{jp}} = |I_j|^p.$$

Tenemos,

$$\Big\| \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h_{I_j}}{\|h_{I_j}\|_{L^p(w)}} \Big\|_{L^p(w)} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h_{I_j}(x)}{|I_j|^{-\frac{1}{2}} w(I_j)^{\frac{1}{p}}} \Big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=0}^{N-1} |I_j|^{-\frac{1}{2}} h_{I_j}(x) \Big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^1 \Big| \sum_{j=0}^{N-1} 2^j h(2^j x) \Big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pero

$$\sum_{j=0}^{N-1} 2^j h(2^j x) = \begin{cases} 1 + 2 + \ldots + 2^{N-1}, & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2^N} \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2^N} \le x < 1. \end{cases}$$

Entonces,

$$\Big\| \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h_{I_j}}{\|h_{I_j}\|_{L^p(w)}} \Big\|^p_{L^p(w)} = \int_0^{\frac{1}{2^N}} (2^N - 1)^p px^{p-1}dx + \int_{\frac{1}{2^N}}^1 px^{p-1}dx$$
$$= \frac{(2^N - 1)^p}{2^{Np}} + \Big(1 - \frac{1}{2^{2Np}}\Big) \le 2.$$

Por lo tanto, nunca podremos tener (4.34) para $w(x) = p|x|^{p-1}$. □

4.3. Espacios de Besov con peso y suavidad generalizada $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ y $B^{\Psi}_{p,q}(w)$

4.3.1. Definiciones y resultados preliminares

Sea $\mathcal{A}_1$ la clase de **núcleos admisibles** definida como el conjunto de funciones $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tales que

$$Supp\,\hat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{2} < |\xi| < 2\} \ y \ |\hat{\varphi}| \geq C > 0 \ si \ \frac{3}{5} < |\xi| < \frac{5}{3}. \tag{4.36}$$

Definimos $\mathcal{A}_0$ como el conjunto de todas las funciones $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tales que

$$Supp\,\hat{\Phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \leq 2\} \text{ y } |\hat{\Phi}(\xi)| \geq C > 0 \ si \ |\xi| \leq \frac{5}{3}. \tag{4.37}$$

Dada una función φ definida en $\mathbb{R}^d$ usamos la notación

$$\varphi_k(x) = 2^{kd}\varphi(2^k x). \tag{4.38}$$

Siguiendo la notación en [2] llamaremos $\mathfrak{B}$ al conjunto de funciones $\Psi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ tales que $\Psi(1) = 1$ y para todo $t > 0$

$$\sup_{s>0} \frac{\Psi(ts)}{\Psi(s)} < \infty \tag{4.39}$$

Definición 4.3.1. *Sean $0 < p, q \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{A}_1$, $\Phi \in \mathcal{A}_0$, $\Psi \in \mathfrak{B}$ y w un peso en $\mathbb{R}^d$.*

*i) El espacio de **Besov homogéneo con peso y suavidad generalizada** $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ es el conjunto de todas las distribuciones temperadas $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}$ (módulo polinomios) tales que*

$$\|f\|_{\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\Psi(2^k)\|\varphi_k * f\|_{L^p(w)})^q\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{4.40}$$

*ii) El espacio de **Besov con peso y suavidad generalizada** $B^{\Psi}_{p,q}(w)$ es el conjunto de todas las distribuciones temperadas $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ tales que*

$$\|f\|_{B^{\Psi}_{p,q}(w)} = \|\Phi * f\|_{L^p(w)} + \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (\Psi(2^k)\|\varphi_k * f\|_{L^p(w)})^q\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{4.41}$$

Si $\|f\|_{\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = 0$ se ha de tener $\varphi_k * f \equiv 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Tomando transformadas de Fourier se deduce que $\hat{\varphi}(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi) \equiv 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Debido a la definición de $\varphi \in \mathcal{A}_1$ esto es equivalente a $Supp\hat{f} = \{0\}$ y por tanto f es un polinomio. Esto explica por qué es necesario trabajar con clases de equivalencia modulo polinomios en (4.40). Este fenómeno desaparece en la definición (4.41) porque $\hat{\Phi}(0) \neq 0$.

Cuando $w \equiv 1$ y $\Psi(t) = t^\alpha,\ \alpha > 0$, la Definición 4.3.1 coincide con las definiciones de espacios de Besov $\dot{B}^\alpha_{p,q}$ y $B^\alpha_{p,q}$ dadas en [56, 23] ó [22]. Los espacios $B^\alpha_{p,q}$ coinciden con los espacios clásicos de Besov definidos con módulos de continuidad cuando $\alpha > d(\frac{1}{p} - 1)_+$ (ver [56]).

Varios autores han considerado el caso $\Psi(t) = t^\alpha,\ \alpha > 0$ y un peso en $\mathbb{R}^d$. H.-Q. Bui realizó un estudio completo de sus propiedades en 1982 ([8]) cuando $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$, incluyendo resultados de interpolación. S. Roudenko ([66, 67]) los ha considerado en el contexto de pesos matriciales con especial énfasis en el caso homogéneo. D. Haroske y H. Triebel ([31]) han considerado pesos de la forma $w_\alpha = (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}},\ x \in \mathbb{R}^d$ y algunas variantes de naturaleza similar. Finalmente, en [36] se consideran los espacios $B^\alpha_{p,q}(w)$ cuando $w \in A^{loc}_\infty$. Al igual que en la sección 5 de [22] se puede demostrar la equivalencia

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}(w)} \approx \|f\|_{L^p(w)} + \|f\|_{\dot{B}^\alpha_{p,q}(w)}, \tag{4.42}$$

cuando $\alpha > 0,\ 1 \leq p < \infty$ y $0 < q \leq \infty$.

También el caso $w = 1$ y $\Psi \in \mathfrak{B}$ ha siso considerado en la literatura. C. Merucci ([50]) y F. Cobos y D. Fernández ([11]) los han estudiado en el contexto de la interpolación real con un parámetro funcional. Cuando $\Psi(t) = t^\alpha(1 + \log^+ t)^\gamma,\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, se obtienen los espacios de Besov de tipo logarítmico considerados por H.-G. Leopold ([47]) y por W. Farkas y H.-G. Leopold en [21]. Estas referencias consideran el caso no homogéneo, pero pequeñas modificaciones son necesarias en el caso de espacios homogéneos.

Las definiciones dadas en 4.3.1 dependen de la elección de $\varphi \in \mathcal{A}_1$ y $\Phi \in \mathcal{A}_0$, pero puede probarse que distintas elecciones de estas funciones producen resultados equivalentes en (4.40) y (4.41), por lo que los espacios que definen coinciden (ver, por ejemplo, teorema 1.8 en [66],). Los espacios $\dot{B}^\Psi_{p,q}(w)$ y $B^\Psi_{p,q}(w)$ son cuasi-Banach con las expresiones (4.40) y (4.41) respectivamente (ver las referencias de los párrafos anteriores para los casos particulares mencionados). En algunas de las referencias mencionadas se considera clases $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_0$ más generales, pero las definiciones siguen siendo equivalentes.

Ya hemos mencionado en la sección 4.1 que si Φ es una familia de ondículas con suficiente regularidad la pertenecía a un espacio de Besov $B^\alpha_{p,q}$ ó $\dot{B}^\alpha_{p,q}$ puede obtenerse usando una expresión que envuelve los coeficientes de ondículas (ver (4.3) en la sección 4.1) y que tales familias de ondículas son bases incondicionales de estos espacios de Besov.

Resultados similares se han obtenido para espacios de Besov con peso por un lado y con suavidad generalizada por otro. Para uso posterior en las aplicaciones enunciaremos los resultados hasta ahora demostrados.

Proposición 4.3.2. *(ver teorema 10.2 en [66] o teorema 6.2 en [67]) Sean* $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *y sea* $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$. *Supongamos que* $\Phi = \{\psi^l : l = 1, 2, \ldots, L\}$ *es una familia de ondículas d-dimensional de Lemarié-Meyer. Entonces*

$$\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w)} \approx \sum_{l=1}^{L} \Big[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}} (|Q|^{-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}} |\langle f, \psi^l_Q \rangle| w(Q)^{\frac{1}{p}})^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.43}$$

La base $\mathcal{W} = \{\psi^l_Q : l = 1, 2, \ldots, L, Q \in \mathcal{D}\}$ *es incondicional si* $q < \infty$.

Para enunciar el teorema 1 de [36] necesitamos alguna notación previa. Para $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$ sea $q_w = \text{ínf}\{u \in [1, \infty) : w \in A_u(\mathbb{R}^d)\}$ el índice crítico de w. Definir

$$\sigma_p(w) := d\Big(\frac{q_w}{\text{mín}(p, q_w)} - 1 \Big) + (q_w - 1)d, \quad \sigma_q := \sigma_q(1) = d\Big(\frac{1}{\text{mín}(q, 1)} - 1 \Big)$$

y

$$\sigma_{p,q}(w) := \text{máx}\{\sigma_p(w), \sigma_q\}.$$

Proposición 4.3.3. *(Ver teorema 1, 14 y 15 en [36]) Sean* $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *y* $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Supongamos que* $\widetilde{\Phi} = \{\psi^0, \psi^L : L = 1, 2, \ldots, L\} \subset C^r(\mathbb{R}^d)$ *con* $r = (1 + [s])_+$ *son una función de escala* ψ^0 *y una familia de ondículas d-dimensionales de soporte compacto ([15]) tal que* $\int_{\mathbb{R}^d} x^\beta \psi^l(x) dx = 0$ *para todo* $|\beta| \leq \text{máx}\{r, L_B\}$ *donde* $L_B = [\sigma_p(w) - \alpha]$, $l = 1, 2, \ldots, L$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}(w)} \approx & \Big\| \Big(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ |Q|=1}} |\langle f, \psi^0_Q \rangle|^2 \chi_Q(\cdot) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(w)} \\ & + \sum_{l=1}^{L} \Big[\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}} (|Q|^{-\frac{1}{d}-\frac{1}{2}} |\langle f, \psi^l_Q \rangle|^2 w(Q)^{\frac{1}{p}})^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Si $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\mathcal{W}^+ = \{\psi^0_{0,k}, \psi^l_{j,k} : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d,\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ *es base incondicional de* $B^{\alpha}_{p,q}(w)$.

Nota 4.3.4. *La Proposición 4.3.2 se prueba en el contexto de pesos matriciales y 4.3.3 se prueba para pesos* A_∞ *locales.*

Para el caso homogéneo con pesos un resultado similar se prueba en [6].

Describiremos finalmente un resultado similar para los espacios de Besov generalizados $B^{\Psi}_{p,q}$ que aparecen en [2]. Para una función $\Psi \in \mathfrak{B}$ denotamos por α_Ψ y β_Ψ los exponents de dilatación inferior y superior de Ψ (ver [3], página 277, [44] página 54 o (4.147) y (4.148) en esta monografía). Consideramos ondículas de soporte compacto (ver [15]).

Proposición 4.3.5. *(ver teorema 13 en [2]) Sean* $\Psi \in \mathfrak{B}$, $0 < p < \infty$ *y* $0 < q \leq \infty$. *Supongamos que* $\widetilde{\Phi} = \{\psi^0, \psi^l : l = 1, 2, \ldots, L\} \subset C^r(\mathbb{R}^d)$, *con* $r > \max(\alpha_\Psi, \frac{2d}{p} + \frac{d}{2} - \beta_\Psi)$, *son una función de escala* ψ^0 *y una familia de ondículas d-dimensional con soporte compacto (ver [15]) tal que* $\int_{\mathbb{R}^d} x^\beta \psi^l(x)dx = 0$, $|\beta| \leq r$, $l = 1, 2, \ldots, L$. *Entonces*

$$\|f\|_{B^\Psi_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \approx \Big\| \Big(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ |Q| \leq 1}} |\langle f, \psi^0_Q \rangle|^2 \chi_Q(\cdot) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$+ \sum_{l=1}^{L} \Big[\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \Big(\sum_{|Q| = 2^{-jd}} (\Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}}) |Q|^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} |\langle f, \psi^l_Q \rangle|)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.45}$$

Además, si $q < \infty$, $\mathcal{W}^+ = \{\psi^0_{0,k}, \psi^l_{j,k} : j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ *es una base incondicional de* $B^\Psi_{p,q}(\mathbb{R}^d)$

En lo que sigue haremos uso del siguiente resultado:

Lema 4.3.6. *Sean* $N_1, N_2, \ldots, N_J \in \mathbb{N}$ *y* $N = N_1 + \ldots + N_J$. *Para cualquier* $\alpha > 0$, *se tiene*

$$\min\{N, N^\alpha\} \leq \sum_{j=1}^{J} N_j^\alpha \leq \max\{N, N^\alpha\}.$$

Demostración. Si $\alpha \leq 1$,

$$\sum_{j=1}^{J} N_j^\alpha \leq \sum_{j=1}^{J} N_j = N = \max\{N, N^\alpha\}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{J} N_j^\alpha \geq \Big(\sum_{j=1}^{J} N_j \Big)^\alpha = N^\alpha = \min\{N, N^\alpha\}.$$

Si $\alpha > 1$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{J} N_j^\alpha \leq \Big(\sum_{j=1}^{J} N_j \Big)^\alpha = N^\alpha = \max\{N, N^\alpha\}.$$

Por el otro lado,

$$\sum_{j=1}^{J} N_j^\alpha \geq \sum_{j=1}^{J} N_j = N = \min\{N, N^\alpha\}.$$

□

4.3.2. Funciones de democracia

Teniendo en cuenta las definiciones 4.3.1, vamos a considerar los siguientes espacios de sucesiones que corresponderían con el espacio al que que pertenecerían los coeficientes de ondículas de un elemento en el espacio $B^{\Psi}_{p,q}(w)$ ó $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$. Consideramos el caso $L = 1$ ya que $L > 1$ solo hace variar las constantes en los cálculos de las funciones de democracia.

Denotamos por $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^d$, por $\mathcal{D}_0$ el conjunto de todos los $Q \in \mathcal{D}$ tales que $|Q| = 1$ y por $\mathcal{D}^+$ el conjunto de todos los $Q \in \mathcal{D}$ tales que $|Q| \leq 1$.

Definición 4.3.7. *Sean* $0 < p, q \leq \infty$ *y* $\Psi \in \mathfrak{B}$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}^d$.

i) Definimos $\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ *como el conjunto de todas las sucesiones de números complejos* $\boldsymbol{s} = \{s_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ *tales que*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}}(\Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}})|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|w(Q)^{\frac{1}{p}})^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{4.46}$$

ii) Definimos $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$ *como el conjunto de todas las sucesiones de números complejos* $\boldsymbol{s} = \{s_Q : Q \in \mathcal{D}^0\} \cup \{s_Q : Q \in \mathcal{D}^+\}$ *tales que*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Big[\sum_{Q\in\mathcal{D}_0}|s_Q|^p w(Q)\Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$+\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{|Q|=2^{-jd}}(\Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}})|Q|^{-\frac{1}{2}}|s_Q|w(Q)^{\frac{1}{p}})^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{4.47}$$

Es fácil probar que $\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ y $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$ son espacios cuasi-normados que satisfacen (a), (b), (c) y (d) de la subsección 4.1.4 cuando $p < \infty$ y $q < \infty$. En este espacio de sucesiones consideramos el elemento

$$\mathbf{e}_{Q'} = \begin{cases} 1, & \text{si } Q = Q', \\ 0, & \text{si } Q \neq Q'. \end{cases}$$

De la Definición 4.3.7 se deduce que $\dot{\mathcal{B}}_c = \{\mathbf{e}_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ y $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_Q : Q \in \mathcal{D}^0\} \cup \{\mathbf{e}_Q : Q \in \mathcal{D}^+\}$ son bases incondicionales de $\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ y $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$ respectivamente cuando $0 < p, q \leq \infty$, a las que llamaremos bases canónicas.

Para $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito escribimos

$$\widetilde{1}_\Gamma = \sum_{Q\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_E} \tag{4.48}$$

para denotar la función característica normalizada en el espacio $E = \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ ó $E = \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$

Proposición 4.3.8. *Sean* $0 < p, q \leq \infty$, $\Psi \in \mathfrak{B}$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}^d$.

i) Si $\Gamma \subset \mathcal{D}$ *es finito se tiene*

$$\min\{|\Gamma|^{\frac{1}{p}}, |\Gamma|^{\frac{1}{q}}\} \leq \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} \leq \max\{|\Gamma|^{\frac{1}{p}}, |\Gamma|^{\frac{1}{q}}\}.$$

ii) Si $\Gamma \subset \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}^+$ *es finito existen* $C_1, C_2 > 0$ *tal que*

$$C_1 \min\{|\Gamma|^{\frac{1}{p}}, |\Gamma|^{\frac{1}{q}}\} \leq \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)} \leq C_2 \max\{|\Gamma|^{\frac{1}{p}}, |\Gamma|^{\frac{1}{q}}\}.$$

Demostración. i) Para $Q \in \mathcal{D}$ de la Definición 4.3.7 de deduce

$$\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}})|Q|^{-\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.49}$$

Entonces,

$$\widetilde{1}_\Gamma = \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}})|Q|^{-\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{p}}}.$$

Escribimos $\Gamma = \bigcup_{j=1}^J \Gamma_j$ donde $\Gamma_j = \{Q \in \Gamma : |Q| = 2^{-dk_j}\}$ con $k_1 > k_2 > \ldots > k_J$. Tenemos $\sum_{j=1}^J |\Gamma_j| = |\Gamma|$. Usando de nuevo la Definición 4.3.7 se deduce

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Big[\sum_{j=1}^J \Big(\sum_{Q\in\Gamma_j} 1\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}} = \Big[\sum_{j=1}^J |\Gamma_j|^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

El resultado se deduce del Lema 4.3.6 con $\alpha = \frac{q}{p}$.
ii) Sea $\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^+$ con $\Gamma^0 \subset \mathcal{D}_0$ y $\Gamma^+ \subset \mathcal{D}^+$ de manera que $|\Gamma| = |\Gamma^0| + |\Gamma^+|$. Un razonamiento similar al anterior produce

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)} = |\Gamma^0|^{\frac{1}{p}} + \Big[\sum_{j=1}^{J^+} |\Gamma_j^+|^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

donde Γ_j^+ esta definido como en i) reemplazando Γ por Γ^+ y $\sum_{j=1}^{J^+} |\Gamma_j^+| = |\Gamma^+|$. Si $q \geq p$, del Lema 4.3.6 se obtiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)} \leq |\Gamma^0|^{\frac{1}{p}} + |\Gamma^+|^{\frac{1}{p}} \leq c(p)(|\Gamma^0| + |\Gamma^+|)^{\frac{1}{p}} = c(p)|\Gamma|^{\frac{1}{p}}$$

y

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)} \geq |\Gamma^0|^{\frac{1}{p}} + |\Gamma^+|^{\frac{1}{q}} \geq c(q)(|\Gamma^0| + |\Gamma^+|)^{\frac{1}{q}} = c(q)|\Gamma|^{\frac{1}{q}}.$$

Un razonamiento similar prueba el caso $q < p$. □

Teorema 4.3.9. *Sean* $0 < p, q \leq \infty$, $\Psi \in \mathfrak{B}$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}^d$. *Se tiene* *i)* $h_l(N;\dot{\mathcal{B}}_c,\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) = \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}$ *y*

$h_r(N;\dot{\mathcal{B}}_c,\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) = \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}$.

ii) $h_l(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) = \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}$ *y*

$h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) = \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}$.

Nota 4.3.10. *Observar que los espacios* $\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ *y* $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$ *son democráticos si y sólo si* $p=q$.

Demostración. i) Si $\Gamma=\{Q_1,\ldots,Q_N\}\subset\mathcal{D}$ es una colección de cubos diádicos disjuntos de igual tamaño, por ejemplo, $|Q_j|=2^{-ld},\ j=1,2,\ldots,N$ y $l\in\mathbb{Z}$ fijo, usamos (4.49) y la Definición 4.3.7 para obtener

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} = \Big(\sum_{j=1}^{N}1\Big)^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{1}{p}} = |\Gamma|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.50}$$

Si $\Gamma=\{Q_1,\ldots,Q_N\}\subset\mathcal{D}$ es una colección de cubos diádicos disjuntos de tamaños $|Q_j|=2^{-k_jd}$ con $k_1>k_2>\ldots>k_N$, usamos (4.49) y la Definición 4.3.7 para obtener

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{\tau,q}(w)} = \Big(\sum_{j=1}^{N}1\Big)^{\frac{1}{q}} = N^{\frac{1}{q}} = |\Gamma|^{\frac{1}{q}}. \tag{4.51}$$

La Proposición 4.3.8 junto con (4.50) y (4.51) nos da el resultado.

La demostración del caso ii) es similar. □

El algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] nos permite escribir los siguientes Corolarios.

Corolario 4.3.11. *Sean* $\alpha\in\mathbb{R},\ 1\le p<\infty,\ 0<q\le\infty$ *y* $w\in A_p(\mathbb{R}^d)$. *Si* $\mathcal{W}$ *es una base de ondículas obtenida a partir de la familia* Φ *de la Proposición 4.3.2 se tiene*

$$h_l(N;\mathcal{W},\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w)) = \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}$$

y

$$h_r(N;\mathcal{W},\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(w)) = \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}.$$

Corolario 4.3.12. *Sean* $\alpha\in\mathbb{R},\ 0<p,q<\infty$ *y* $w\in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Si* $\mathcal{W}^+$ *es una base de ondículas obtenida a partir de la familia* $\widetilde{\Phi}$ *de la Proposición 4.3.3 se tiene*

$$h_l(N;\mathcal{W}^+,B^{\alpha}_{p,q}(w)) = \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}$$

y

$$h_r(N;\mathcal{W}^+,B^{\alpha}_{p,q}(w)) = \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}},N^{\frac{1}{q}}\}.$$

Corolario 4.3.13. *Sean $\Psi \in \mathfrak{B}$, $0 < p < \infty$ y $0 < q \leq \infty$. Si $\mathcal{W}^+$ es una base de ondículas obtenida de la familia $\widetilde{\Phi}$ de la Proposición 4.3.5 se tiene*

$$h_l(N; \mathcal{W}^+, B^{\Psi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)) = \min\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}$$

y

$$h_r(N; \mathcal{W}^+, B^{\Psi}_{p,q}(\mathbb{R}^d)) = \max\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}.$$

4.3.3. Aplicaciones

Usando el Teorema 4.3.9 y aplicando el Teorema 3.6.1 se obtienen las siguientes inclusiones para las clases avariciosas y los espacios de aproximación de espacios de sucesiones de Besov.

Corolario 4.3.14. *Sean $0 < p, q \leq \infty$, $\Psi \in \mathfrak{B}$ y w un peso en $\mathbb{R}^d$. Para todo, $\alpha > 0$ y $0 < r \leq \infty$ se tiene*

$$\begin{aligned} i) \qquad & \ell^{\tau^-,r}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\alpha}_r(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_r(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \\ & \hookrightarrow \ell^{\tau^+,r}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ii) \qquad & \ell^{\tau^-,r}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\alpha}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) \\ & \hookrightarrow \ell^{\tau^+,r}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{\tau^-} = \alpha + \frac{1}{\min(p,q)}$ y $\frac{1}{\tau^+} = \alpha + \frac{1}{\max(p,q)}$.

Para valores particulares de los parámetros los espacios de Lorentz discretos que aparecen en el Corolario anterior pueden identificarse con los espacios de Besov, como se muestra en el siguiente Lema.

Lema 4.3.15. *Sean $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $\Psi \in \mathfrak{B}$ y $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. Sea τ definido por $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$ y $\Psi_\alpha(t) = \Psi(t)t^\alpha$. Se tiene*

i) $\ell^{\tau,\tau}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) = \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi_\alpha}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$ *y* *ii)* $\ell^{\tau,\tau}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)) = \mathfrak{s}B^{\Psi_\alpha}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$.

Demostración. i) Como $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$ existe $r \geq 1$ tal que $w \in A_r$. Aplicando el Lema 4.1.5 con $\delta = \frac{\tau}{p} < 1$ se deduce que si $u(x) = w(x)^{\frac{\tau}{p}}$ entonces, $|Q|^{-\frac{1}{p}} w(Q)^{\frac{1}{p}} \approx |Q|^{-\frac{1}{\tau}} u(Q)^{\frac{1}{\tau}}$.

El resultado se sigue de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s}\|_{\ell^{\tau,\tau}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w))} &= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} \|s_Q \mathbf{e}_Q\|^{\tau}_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)}\Big)^{\frac{1}{\tau}} = \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |s_Q|^{\tau} \|\mathbf{e}_Q\|^{\tau}_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)}\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|s_Q|\Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}})|Q|^{-\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{p}})^{\tau}\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|s_Q|\Psi(|Q|^{-\frac{1}{d}})|Q|^{-\frac{1}{2}} |Q|^{-\frac{\alpha}{d}} u(Q)^{\frac{1}{\tau}})^{\tau}\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\ &= \|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi_\alpha}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})}.\end{aligned}$$

ii) La demostración del caso ii) es similar.

□

El Lema que acabamos de demostrar nos permite caracterizar los espacios de aproximación y clases avariciosas en espacios de sucesiones de Besov particulares. Para que se pueda tener una igualdad en las inclusiones del Corolario 4.3.14 debe cumplirse $\tau^- = \tau^+$ y por tanto $p = q$.

Corolario 4.3.16. *Sean $0 < p \le \infty$, $\Psi \in \mathfrak{B}$, $\alpha > 0$ y $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. Sea τ definido por $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$ y $\Psi_\alpha(t) = \Psi(t)t^\alpha$. Se tiene*

i) $\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{d}}_{\tau}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,p}(w)) = \mathscr{G}^{\frac{\alpha}{d}}_{\tau}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,p}(w)) = \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi_\alpha}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$

y

ii) $\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{d}}_{\tau}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,p}(w)) = \mathscr{G}^{\frac{\alpha}{d}}_{\tau}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,p}(w)) = \mathfrak{s}B^{\Psi_\alpha}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$.

Demostración. Usar el Corolario 4.3.14 con $p = q$ y $r = \tau$ seguido del Lema 4.3.15 con $p = q$. □

Tomar $\tau_0 < \tau^-$ en el Corolario 4.3.14. Como $\ell^{\tau_0,r_0} \hookrightarrow \ell^{\tau^-,r}$ para todo $0 < r_0, r \le \infty$ se deducen las inclusiones:

$$\ell^{\tau_0,r_0}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\alpha}_{r}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_{r}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \tag{4.52}$$

con inclusiones análogas para $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$.

De manera similar, si $\tau_1 > \tau^+$ y $0 < r, r_1 \le \infty$ se tiene

$$\mathscr{G}^{\alpha}_{r}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_{r}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \ell^{\tau_1,r_1}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \tag{4.53}$$

con inclusiones análogas para $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$.

Combinando estos resultados con el Lema 4.3.15 se obtienen inclusiones de los espacios de aproximación y las clases avariciosas en espacios de sucesiones de Besov.

Corolario 4.3.17. *Sean* $0 < p, q \leq \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\Psi \in \mathfrak{B}$, $\alpha > 0$ *y* $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Sean* $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_0 < \infty$ *y* $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\alpha_0}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ *y* $\frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$. *Escribimos* $\Psi_{\alpha_j} = \Psi(t)t^{\alpha_j}$, $j = 0, 1$. *Se tiene*

$$\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi_{\alpha_0}}_{\tau_0,\tau_0}(w^{\frac{\tau_0}{p}}) \hookrightarrow \mathscr{G}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi_{\alpha_1}}_{\tau_1,\tau_1}(w^{\frac{\tau_1}{p}})$$

y análogamente para los espacios $\mathfrak{s}B^{\Psi}_{p,q}(w)$.

Demostración. Como $\frac{1}{\tau_0} > \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ y $\frac{1}{\tau_1} < \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$, basta tomar $r_0 = \tau_0$ y $r_1 = \tau_1$ en (4.52) y (4.53) y aplicar el Lema 4.3.15. □

El algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] permite traducir los Corolarios 4.3.16 y 4.3.17 en términos de espacios de Besov $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ y $B^{\Psi}_{p,q}(w)$ cuando exista una caracterización de estos espacios con bases de ondículas (ver la fórmula (4.3) de la sección 4.1 y las Proposiciones 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.5). Enunciamos los resultados en el caso de la Proposición 4.3.2 solamente.

Corolario 4.3.18. *Sean* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq \tau < p < \infty$ *y elegir* $0 < \alpha < \infty$ *tal que* $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$. *Si* $w \in A_\tau(\mathbb{R}^d)$ *se tiene*

$$\mathcal{A}_\tau^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{B}^s_{p,p}(w)) = \mathscr{G}_\tau^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{B}^s_{p,p}(w)) = \dot{B}^{\alpha+s}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$$

para cualquier base de ondículas d-dimensional $\mathcal{W}$ *de Lemarié-Meyer.*

Corolario 4.3.19. *Sean* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq \tau_0 < \tau_1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$ *y elegir* $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_0 < \infty$ *tal que* $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\alpha_0}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ *y* $\frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$. *Si* $w \in A_{\tau_0}(\mathbb{R}^d)$ *se tiene*

$$\dot{B}^{\alpha_0+s}_{\tau_0,\tau_0}(w^{\frac{\tau_0}{p}}) \hookrightarrow \mathscr{G}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{B}^s_{p,q}(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{B}^s_{p,q}(w)) \hookrightarrow \dot{B}^{\alpha_1+s}_{\tau_1,\tau_1}(w^{\frac{\tau_1}{p}})$$

para cualquier base de ondículas d-dimensional $\mathcal{W}$ *de Lemarié Meyer.*

Nota 4.3.20. *Nuestros resultados solo permiten identificar los espacios de aproximación de los espacios de Besov* $\dot{B}^{\gamma}_{p,q}(w)$ *cuando* $p = q$ *(ver Corolario 4.3.18). Una caracterización de estos espacios de aproximación cuando* $p \neq q$ *y* $w = 1$ *ha sido obtenida por B. Jawerth y M. Milman ([38]), a saber*

$$\mathcal{A}_Q^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, \dot{B}^{\beta}_{p,q}) = \dot{B}^{\gamma}_Q(L^{P,Q})$$

con $\gamma = \alpha + \beta$, $\frac{1}{Q} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{q}$ *y* $\frac{1}{P} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$ *(*$\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $0 < p, q \leq \infty$*), donde* $\dot{B}^{\gamma}_Q(L^{Q,P})$ *está definido como en 4.3.1 reemplazando la norma* L^p *por la norma norma* $L^{Q,P}$ *del espacio de Lorentz.*

4.4. Espacios de Triebel-Lizorkin con peso $\dot{F}^s_{p,q}(w)$ y $F^s_{p,q}(w)$

4.4.1. Definiciones y resultados preliminares

Sean $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ definidos como en la sección 4.3.

Definición 4.4.1. *Sean $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty,\ \varphi \in \mathcal{A}_1,\ \Phi \in \mathcal{A}_0$ y w un peso en $\mathbb{R}^d$.*

*i) El espacio de **Triebel-Lizorkin homógeneo con peso** $\dot{F}^s_{p,q}(w)$ es el conjunto de todas las distribuciones temperadas $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}$ (módulo polinomios) tales que*

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(w)} = \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{ks}|\varphi_k * f|)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(w)} < \infty. \tag{4.54}$$

*ii) El espacio de **Triebel-Lizorkin con peso** $F^s_{p,q}(w)$ es el conjunto de todas las distribuciones temperadas $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ tales que*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(w)} = \|\Phi * f\|_{L^p(w)} + \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{ks}|\varphi_k * f|)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(w)} < \infty. \tag{4.55}$$

Cuando $w = 1$ la definición 4.4.1 coincide con las definiciones de espacios de Triebel-Lizorkin $\dot{F}^s_{p,q}$ y $F^s_{p,q}$ dadas en [22]. Al igual que en la sección 5 de [22] se puede probar que

$$\|f\|_{F^\alpha_{p,q}(w)} \approx \|f\|_{L^p(w)} + \|f\|_{\dot{F}^\alpha_{p,q}(w)}$$

cuando $\alpha > 0,\ 1 \leq p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$.

Las definiciones dadas en 4.4.1 dependen de la elección de $\varphi \in \mathcal{A}_1$ y $\Phi \in \mathcal{A}_0$, pero puede probarse que distintas elecciones de estas funciones producen resultados equivalentes en (4.54) y (4.55)

Ya hemos mencionado en la sección 4.1 que si Φ es una familia de ondículas con suficiente regularidad, para $w = 1$ los espacios $\dot{F}^s_{p,q}$ ó $F^s_{p,q}$ son caracterizados en términos de los coeficientes de ondículas (ver (4.4)) y que tales familias de ondículas son bases incondicionales de estos espacios de Triebel-Lizorkin.

Para uso posterior en las aplicaciones describiremos los resultados hasta ahora demostrados sobre la caracterización con ondículas de casos particulares de espacios de Triebel-Lizorkin con peso.

Para el caso de espacios de Lebesgue con peso, se tiene $L^p(w) = F^0_{p,2}(w)$ si $w \in A_p(\mathbb{R}^d),\ 1 < p < \infty$. En [26] y [1] se prueba el siguiente resultado sobre caracterización de espacios $L^p(w)$ con bases de ondículas.

Proposición 4.4.2. *([26, 1]) Sean* $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$ *y* $\Phi = \{\psi^1, \ldots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ *con* $L = 2^d - 1$ *una familia de ondículas que proviene de un Análisis Multiresolución (AMR) 1-regular (ver definición en [51] y [1]). Entonces,* $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D}, l = 1, 2, \ldots, L\}$ *es una base incondicional para* $L^p(w)$ *(ver también [25]) y se tiene la caracterización*

$$\|f\|_{L^p(w)} \approx \Big\| \Big(\sum_{l=1}^{2^d-1} \sum_{Q \in \mathcal{D}} (|\langle f, \psi_Q^l \rangle| |Q|^{-\frac{1}{2}} \chi_Q(\cdot))^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(w)} \tag{4.56}$$

El resultado (4.56) es también cierto para la familia de ondículas de Haar en $\mathbb{R}^d$ cuando $w \in A_p^{dy}(\mathbb{R}^d)$ (ver teorema 6 en [1]).

Otro caso estudiado es el de los espacios de Hardy con peso $H^p(w)$, $0 < p \leq 1$ (ver [12] para la definición) definidos en $\mathbb{R}$. Para $w \in A_\infty(\mathbb{R})$ se define el **índice crítico** de w como $q_w = \text{ínf}\{q > 1 : w \in A_q(\mathbb{R})\}$.

Proposición 4.4.3. *(Ver teorema 4.2 en [26]) Sean* $0 < p \leq 1$, $w \in A_\infty(\mathbb{R})$ *y* q_w *el índice crítico de* w. *Sea* $L \geq 1$ *tal que* $L \geq \frac{q_w}{p}$ *y* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *una ondícula con* $\psi \in \mathcal{R}^L$ *(ver definición en capítulo 6 de [33]). Entonces, la colección* $\mathcal{W} = \{\psi_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ *es una base incondicional de* $H^p(w)$ *y*

$$\|f\|_{H^p(w)} \approx \Big\| \Big(\sum_{Q \in \mathcal{D}} (|\langle f, \psi_Q \rangle| |Q|^{-\frac{1}{2}} \chi_Q(\cdot))^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(w)} \tag{4.57}$$

El siguiente resultado de M. Izuki e Y. Sawano ([36]) amplia los resultados de las Proposiciones 4.4.2 y 4.4.3 a espacios de Triebel-Lizorkin con peso $F_{p,q}^s(w)$ con $0 < p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ y $w \in A_\infty^{loc}(\mathbb{R}^d)$ (ver definición en [36]). Nosotros enunciaremos el resultado solo en el caso de $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. Usaremos la notación $\sigma_{p,q}(w)$ introducida antes de la Proposición 4.3.3.

Proposición 4.4.4. *(Ver teoremas 1, 14 y 15 en [36]) Sean* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *y* $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Supongamos que* $\widetilde{\Phi} = \{\psi^0, \psi^l : l = 1, 2, \ldots, L\} \subset C^r(\mathbb{R}^d)$ *con* $r = (1 + [s])_+$ *son una función de escala* ψ^0 *y una familia de ondículas d-dimensionales de soporte compacto ([15]) tal que* $\int_{\mathbb{R}^d} x^\beta \psi^l(x) dx = 0$ *para todo* $|\beta| \leq \text{máx}\{r, L_F\}$ *donde* $L_F = [\sigma_{p,q}(w) - s]$, $l = 1, 2, \ldots, L$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_{p,q}^s(w)} \approx \; & \Big\| \Big(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D} \\ |Q|=1}} |\langle f, \psi_Q^0 \rangle|^2 \chi_Q(\cdot) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(w)} \\ & + \Big\| \Big[\sum_{l=1}^{L} \sum_{Q \in \mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{s}{d} - \frac{1}{2}} |\langle f, \psi_Q^l \rangle| \chi_Q(\cdot))^q \Big]^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(w)}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Si $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $W = \{\psi_{0,k}^0, \psi_{j,k}^l : j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}^d,\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ *es base incondicional de* $F_{p,q}^s(w)$.

Nota 4.4.5. *Un resultado similar para el caso homogéneo puede encontrarse en [7].*

4.4.2. Funciones de democracia

Teniendo en cuenta los enunciados de la subsección 4.4.1 consideraremos los siguientes espacios de sucesiones que corresponderían con los espacios al que pertenecerían los coeficientes de ondículas de un elemento en los espacios $F^s_{p,q}(w)$ y $\dot{F}^s_{p,q}(w)$. Consideraremos el caso $L = 1$ ya que el caso $L > 1$ solo hace variar las constantes en los cálculos de las funciones de democracia.

Denotamos por $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^d$, por $\mathcal{D}_0$ el conjunto de todos los $Q \in \mathcal{D}$ tales que $|Q| = 1$ y por $\mathcal{D}^+$ el conjunto de todos los $Q \in \mathcal{D}$ tal que $|Q| \leq 1$.

Definición 4.4.6. *Sean $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < r \leq \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}^d$.*

i) Definimos $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)$ como el espacio de todas las sucesiones de números complejos $\boldsymbol{s} = \{s_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ tales que

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} = \left\| \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{2}}|s_Q|\chi_Q(\cdot))^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(w)} < \infty. \tag{4.59}$$

ii) Definimos $\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)$ como el conjunto de todas las sucesiones de números complejos $\boldsymbol{s} = \{s_Q : Q \in \mathcal{D}^0\} \cup \{s_Q : Q \in \mathcal{D}^+\}$ tales que

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{s}\|_{\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)} &= \Big[\sum_{Q\in\mathcal{D}_0} |s_Q|^p w(Q) \Big]^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left\| \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}^+} (|Q|^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{2}}|s_Q|\chi_Q(\cdot))^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(w)} < \infty. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Es fácil probar que $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)$ y $\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)$ son espacios cuasi-normados. En estos espacios de sucesiones consideramos el elemento $\mathbf{e}_Q$ definido por

$$\mathbf{e}_Q = \begin{cases} 1, & \text{si } Q = Q' \\ 0, & \text{si } Q \neq Q'. \end{cases}$$

De la Definición 4.4.6 se deduce que $\dot{\mathcal{B}}_c = \{\mathbf{e}_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ y $\mathcal{B}_c = \{e_Q : Q \in \mathcal{D}^0\} \cup \{e_Q : Q \in \mathcal{D}^+\}$ son bases incondicionales de $\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)$ y $\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)$, respectivamente.

Para $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito, escribimos

$$\widetilde{1}_\Gamma = \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_E} \tag{4.61}$$

para denotar la función característica normalizada en el espacio $E = \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)$ ó $E = \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)$.

Para estudiar las funciones de democracia de estos espacios haremos uso del siguiente resultado:

Lema 4.4.7. *Sean $0 < p < \infty$, $0 < r \le \infty$ y $w \in A^d_\infty$ (ver (4.18)) un peso en $\mathbb{R}^d$. Para todo $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito se tiene*

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{r}{p}}}\Big)^{\frac{1}{r}} \approx \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}} \quad \forall\ x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q \tag{4.62}$$

donde Q_x es el cubo más pequeño de Γ que contiene a x.

Demostración. Existe una única sucesión de cubos diádicos $Q_x \equiv Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_j \subset \ldots$ tal que $|Q_j| = 2^{jd}|Q_x|$. Para $x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q$ se tiene

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{r}{p}}}\Big)^{\frac{1}{r}} \le \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_j)^{\frac{r}{p}}}\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Usando la condición (4.18) se tiene

$$\frac{w(Q_x)}{w(Q_j)} \le C_w 2^{-j\delta d}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{r}{p}}}\Big)^{\frac{1}{r}} \quad &\le \quad C_w^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_x)^{\frac{r}{p}}} 2^{-jd\delta\frac{r}{p}}\Big)^{\frac{1}{r}} \\ &\le C_w \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}} \le \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{r}{p}}}\Big)^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida a que la última suma contiene el término $\frac{\chi_{Q_x}}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}}$. $\square$

Teorema 4.4.8. *Sean $s > 0$, $0 < p < \infty$, $0 < r \le \infty$ y $w \in A^d_\infty$ (ver (4.18)) un peso en $\mathbb{R}^d$.*

i) Si $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito se tiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} \approx N^{\frac{1}{p}}$$

Por tanto,

$$h_l(N; \dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) \approx h_r(N; \dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = N^{\frac{1}{p}}.$$

ii) Si $\Gamma \subset \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}^+$ finito se tiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)} \approx |\Gamma|^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto,

$$h_l(N;\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) \approx h_r(N;\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = N^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. i) Para $Q \in \mathcal{D}$ de la Definición 4.4.6 tenemos

$$\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} = |Q|^{-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}} w(Q)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.63}$$

Por tanto,

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} = \Big\| \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(\cdot)}{w(Q)^{\frac{r}{p}}} \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^p(w)}. \tag{4.64}$$

Sea $S_\Gamma(x) = \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)^{\frac{r}{p}}} \Big)^{\frac{1}{r}}$. Del Lema 4.4.7 se deduce $S_\Gamma(x) \approx \frac{\chi_{Q_x}(x)}{w(Q_x)^{\frac{1}{p}}}$. Definir ahora $Z_\Gamma(x) = \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)}$. Usando el Lema 4.4.7 con $r = 1$ y $p = 1$ se tiene $Z_\Gamma(x) \approx \frac{\chi_{Q_x}}{w(Q_x)}$. Por tanto, $(S_\Gamma(x))^p \approx Z_\Gamma(x)$ para todo $x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q$. De (4.64) se deduce

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} \approx \|S_\Gamma(x)\|_{L^p(w)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (S_\Gamma(x))^p w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\approx \Big(\int_{\mathbb{R}^d} Z_\Gamma(x) w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)} w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\chi_Q(x)}{w(Q)} w(x)dx \Big)^{\frac{1}{p}} = |\Gamma|^{\frac{1}{p}}.$$

ii) Sea $\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^+$ con $\Gamma^0 \subset \mathcal{D}_0$ y $\Gamma^+ \subset \mathcal{D}^+$ de manera que $|\Gamma| = |\Gamma^0| + |\Gamma^+|$. Un razonamiento similar al anterior produce

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)} \approx |\Gamma^0|^{\frac{1}{p}} + |\Gamma^+|^{\frac{1}{p}} \approx |\Gamma|^{\frac{1}{p}}.$$

□

El algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] junto con el Teorema 4.4.8 y las Proposiciones 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4 nos permiten escribir los siguientes resultados:

Teorema 4.4.9. *Considerar los siguientes casos que aparecen en las Proposiciones 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4.*

(A) $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{W}$ una base de ondículas 1-regular.

(B) $0 < p \leq 1,\ w \in A_\infty(\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{W}$ *una base de ondículas L-regular con* $L > \frac{q_w}{p}$ *y* q_w *el índice crítico de* w.

(C) $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty,\ w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$ *y* $\mathcal{W}$ *un sistema de ondículas como en la Proposición 4.4.4.*

Sea $E(w) = L^p(w),\ H^p(w)$ *ó* $F^s_{p,q}(w)$ *según los casos (A), (B) ó (C). Entonces,*

$$h_l(N; \mathcal{W}, E(w)) \approx h_r(N; \mathcal{W}, E(w)) = N^{\frac{1}{p}}$$

por lo que estos sistemas de ondículas son democráticos en estos espacios.

Nota 4.4.10. *Este resultado ha aparecido recientemente publicado en [36]. Aquí se obtiene como corolario de los resultados sobre espacios de sucesiones probados en esta sección.*

4.4.3. Aplicaciones

Usando el Teorema 4.4.8 y aplicando el Teorema 3.6.1 se obtiene la siguiente caracterización de las clases avariciosas y espacios de aproximación de espacios de sucesiones de Triebel-Lizorkin con peso.

Corolario 4.4.11. *Sean* $s > 0,\ 0 < p, q < \infty,\ 0 < r \leq \infty$ *y* $w \in A^d_\infty$ *(ver 4.18); se tiene*

$$i)\ \mathcal{A}^\alpha_q(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = \mathscr{G}^\alpha_q(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = \ell^{\tau,q}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w))$$

y

$$ii)\ \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = \mathscr{G}^\alpha_q(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = \ell^{\tau,q}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)),$$

donde $\frac{1}{\tau} = \alpha + \frac{1}{p}$.

Para valores particulares de los parámetros los espacios de Lorentz discretos que aparecen en el Corolario anterior pueden identificarse con espacios de Besov con peso de sucesiones, como se muestra en el siguiente Lema.

Lema 4.4.12. *Sean* $\alpha > s,\ 0 < p < \infty,\ 0 < r \leq \infty$ *y* $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. *Sea* τ *definido por* $\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{\tau} = \frac{s}{d} - \frac{1}{p}$. *Se tiene*

$$i)\ \ell^{\tau,\tau}(\dot{\mathcal{B}}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = \mathfrak{s}\dot{B}^\alpha_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}) \quad y \quad ii)\ \ell^{\tau,\tau}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = \mathfrak{s}B^\alpha_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}).$$

Demostración. i) Como $w \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$ existe $r \geq 1$ tal que $w \in A_r$. Aplicando el Lema 4.1.5 con $\delta = \frac{\tau}{p} < 1$ se deduce que si $u(x) = w(x)^{\frac{\tau}{p}} \in A_r$ y $|Q|^{-\frac{1}{p}} w(Q)^{\frac{1}{p}} \approx |Q|^{-\frac{1}{\tau}} u(Q)^{\frac{1}{\tau}}$. Por tanto tenemos,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s}\|_{\ell^{\tau,\tau}(\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w))} &= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} \|s_Q\mathbf{e}_Q\|^\tau_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)}\Big)^{\frac{1}{\tau}} = \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |s_Q|^\tau \|\mathbf{e}_Q\|^\tau_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)}\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\
&= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{2}}|s_Q|w(Q)^{\frac{1}{p}})^\tau\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\
&\approx \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|Q|^{-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}}|s_Q|u(Q)^{\frac{1}{\tau}})^\tau\Big)^{\frac{1}{\tau}} = \|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^\alpha_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})}
\end{aligned}$$

ii) La demostración en el caso ii) es similar. □

El Lema que acabamos de demostrar nos permite caracterizar los espacios de aproximación y las clases avariciosas de los espacios de sucesiones de Triebel-Lizorkin con peso como espacios de sucesiones de Besov con pesos particulares.

Corolario 4.4.13. *Sean $0<p<\infty,\ \gamma>0,\ 0<r\le\infty$ y $w\in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. Sea τ definido por $\frac{1}{\tau}=\frac{\gamma}{d}+\frac{1}{p}$. Se tiene*

i) $\mathcal{A}^{\frac{\gamma}{d}}_\tau(\dot{\mathcal{B}}_c,\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = \mathscr{G}^{\frac{\gamma}{d}}_\tau(\dot{\mathcal{B}}_c,\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = \mathfrak{s}\dot{B}^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$

y

ii) $\mathcal{A}^{\frac{\gamma}{d}}_\tau(\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = \mathscr{G}^{\frac{\gamma}{d}}_\tau(\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = \mathfrak{s}B^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$.

Demostración. i) Del Lema 4.4.12 tenemos $\ell^{\tau,\tau}(\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w)) = \mathfrak{s}\dot{B}^\alpha_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})$ si $\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{\tau}=\frac{s}{d}-\frac{1}{p}$. Tomando $\alpha=s+\gamma>s$, el resultado se deduce del Corolario 4.4.11 con $\tau=q$.

La demostración de ii) es similar.

□

En el siguiente corolario probamos un resultado de interpolación.

Corolario 4.4.14. *Sea $0<p<\infty,\ \gamma>0,\ 0<r\le\infty$ y $w\in A_\infty(\mathbb{R}^d)$. Sean τ y τ_θ definidos por $\frac{1}{\tau}=\frac{\gamma}{d}+\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{\tau_\theta}=\frac{\gamma\theta}{d}+\frac{1}{p}$. Entonces, para todo $\gamma>0$ y $0<\theta<1$ tenemos*

i) $(\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w),\mathfrak{s}\dot{B}^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}))_{\theta,\tau_\theta} = \mathfrak{s}\dot{B}^{s+\theta\gamma}_{\tau_\theta,\tau_\theta}(w^{\frac{\tau_\theta}{p}})$

y

ii) $(\mathfrak{s}F^s_{p,r}(w),\mathfrak{s}B^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}))_{\theta,\tau_\theta} = \mathfrak{s}B^{s+\theta\gamma}_{\tau_\theta,\tau_\theta}(w^{\frac{\tau_\theta}{p}})$.

Demostración. i) Si $\mathbb{X}=\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)$ usamos los Teoremas 4.4.8 y 3.4.6 y el Lema 4.4.12 para τ definido por $\frac{1}{\tau}=\frac{\gamma}{d}+\frac{1}{p}$; para todo $N=1,2,\ldots$ obtenemos

$$\sigma_N(\mathbf{s})_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} \le CN^{-(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p})}\|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})}. \tag{4.65}$$

Del Lema 4.4.12 y los Teoremas 4.4.8 y 3.5.2, para todo $\mathbf{s} \in \Sigma_N,\ N = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}})} \approx \|\mathbf{s}\|_{\ell^{\tau,\tau}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w))} \leq C N^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}} \|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)} \tag{4.66}$$

donde $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}$. De las desigualdades (4.65) y (4.66) y usando el Teorema 2.3.5 se obtiene

$$\mathcal{A}_q^{\frac{\gamma\theta}{d}}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = (\mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w), \dot{B}^{s+\gamma}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}))_{\theta,q} \tag{4.67}$$

cuando $0 < q \leq \infty$ y $0 < \theta < 1$. Usando el Corolario 4.4.13

$$\mathcal{A}_{\tau_\theta}^{\frac{\gamma\theta}{d}}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\dot{F}^s_{p,r}(w)) = \dot{B}^{s+\gamma\theta}_{\tau_\theta,\tau_\theta}(w^{\frac{\tau_\theta}{p}}).$$

cuando $\frac{1}{\tau_\theta} = \frac{\gamma\theta}{d} + \frac{1}{p}$. El resultado se deduce de (4.67).

ii) La demostración para el caso ii) es similar. □

El algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] permite traducir los Corolarios 4.4.13 y 4.4.14 en términos de espacios de Triebel-Lizorkin $\dot{F}^s_{p,q}(w)$ y $F^s_{p,q}(w)$ cuando exista una caracterización de estos espacios con bases de ondículas (ver Proposiciones 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4). Como muestra incluimos los resultados para los espacios $L^p(w)$.

Corolario 4.4.15. *Sean* $1 < p < \infty,\ \gamma > 0,\ \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p},\ w \in A_\tau(\mathbb{R}^d)$ *y* $\mathcal{W}$ *una base de ondículas d-dimensional de Lemarié-Meyer. Se tiene*

$$\mathcal{A}_\tau^{\frac{\gamma}{d}}(\mathcal{W}, L^p(w)) = \mathscr{G}_\tau^{\frac{\gamma}{d}}(\mathcal{W}, L^p(w)) = \dot{B}^\gamma_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}).$$

Corolario 4.4.16. *Sean* $1 < p < \infty,\ \gamma > 0,\ \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}$ *y* $w \in A_\tau(\mathbb{R}^d)$. *Para todo* $\theta \in (0, 1)$ *sea* τ_θ *dado por* $\frac{1}{\tau_\theta} = \frac{\gamma\theta}{d} + \frac{1}{p}$. *Entonces*

$$(L^p(w), \dot{B}^\gamma_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}))_{\theta,\tau_\theta} = \dot{B}^{\gamma\theta}_{\tau_\theta,\tau_\theta}(w^{\frac{\tau_\theta}{p}})$$

En general, para los espacios $F^s_{p,q}(w)$ usamos la cracterización dada en la Proposición 4.4.4 junto con la caracterización de los espacios de Besov de la Proposición 4.3.3 para obtener los resultados correspondientes, que generalizan los dos Corolarios anteriores.

Corolario 4.4.17. *Sean* $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty,\ \gamma > 0,\ \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}$ *y* $w \in A_\tau(\mathbb{R}^d)$. *Sea* $\mathcal{W}^+$ *una base de ondículas d-dimensional de soporte compacto como en las Proposiciones 4.4.4 y 4.3.3. Se tiene*

$$\mathcal{A}_\tau^{\frac{\gamma}{d}}(\mathcal{W}^+, F^s_{p,q}(w)) = \mathscr{G}_\tau^{\frac{\gamma}{d}}(\mathcal{W}^+, F^s_{p,q}(w)) = B^{\gamma+s}_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}).$$

Corolario 4.4.18. *Sean* $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty,\ \gamma > 0,\ \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}$ *y* $w \in A_\tau(\mathbb{R}^d)$. *Para todo* $\theta \in (0, 1)$ *sea* τ_θ *dado por* $\frac{1}{\tau_\theta} = \frac{\gamma\theta}{d} + \frac{1}{p}$. *Entonces*

$$(F^s_{p,q}(w), B^\gamma_{\tau,\tau}(w^{\frac{\tau}{p}}))_{\theta,\tau_\theta} = B^{\gamma\theta}_{\tau_\theta,\tau_\theta}(w^{\frac{\tau_\theta}{p}}).$$

4.5. Espacios de Orlicz con peso $L^{\Phi}(w)$

En esta sección obtendremos las funciones de democracia de bases de ondículas en espacios de Orlicz con peso $L^{\Phi}(w)$ (Teorema 1.2.18) así como el resto de los resultados sobre estos espacios que mencionamos en la sección 1.2. Antes de la demostración del teorema, empezamos por recordar su definición y las propiedades básicas necesarias para la prueba de nuestros resultados.

4.5.1. Definiciones y resultados preliminares

Una función de Young es una función convexa no decreciente $\Phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ tal que $\lim_{t\longrightarrow\infty} \Phi(t) = \infty$ y doblante. En este trabajo supondremos que $\Phi(0) = 0$, Φ es estrictamente creciente y finita en todo punto, de modo que es una biyección continua de $[0,\infty)$. Escribiremos $\mathcal{Y}$ para la clase de estas funciones.

Definición 4.5.1. *Sean $\Phi \in \mathcal{Y}$ una función de Young y $w \in \mathrm{W}(\mathbb{R}^d)$ un peso en $\mathbb{R}^d$. El espacio de Orlicz con peso $L^{\Phi}(w)$, es la clase de todas las funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big) \in L^1(w)$ para algún $\lambda > 0$.*

Los espacios $L^{\Phi}(w)$ son espacios de Banach con la norma de Luxemburg (ver por ejemplo [3])

$$\|f\|_{L^{\Phi}(w)} = \inf \Big\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big) w(x)dx \leq 1\Big\}. \tag{4.68}$$

Lema 4.5.2. *([3]) Sean $\Phi \in \mathcal{Y}$ una función de Young y $w \in \mathrm{W}(\mathbb{R}^d)$ un peso en $\mathbb{R}^d$. Entonces, para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$ se tiene*

$$\|\chi_E\|_{L^{\Phi}(w)} = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{w(E)})}. \tag{4.69}$$

Demostración. El resultado se obtiene directamente de (4.68). Para $\lambda > 0$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\lambda\chi_E(x))w(x)dx = \Phi(\lambda) \int_E w(x)dx = \Phi(\lambda)w(E).$$

Por lo tanto de (4.68) se tiene,

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_{L^{\Phi}(w)} &= \inf\{\lambda^{-1} > 0 : \Phi(\lambda)w(E) \leq 1\} \\ &= \Big[\sup\Big\{\lambda > 0 : \Phi(\lambda) \leq \frac{1}{w(E)}\Big\}\Big]^{-1} = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{w(E)})}. \end{aligned}$$

□

La función $\varphi(t) = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})}$, $0 < t < \infty$, satisface $\varphi(t) = \|\chi_E\|_{L^\Phi(w)}$ para cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$ tal que $w(E) = t$, y se llama **función fundamental de** $L^\Phi(w)$. La función φ es una biyección de $[0, \infty)$, continua y estrictamente creciente. Además, φ es quasi-concava, esto es, $\frac{\varphi(t)}{t}$ es no creciente (ver [3], página 67), de donde se deduce que φ es doblante. Nótese que $L^\Phi(w)$ es un espacio de Banach i.r. respecto a la medida $w(x)dx$.

Los índices de Boyd del espacio $L^\Phi(w)$ se pueden calcular directamente de la función de Young Φ o de la función fundamental φ. Se define,

$$h_\varphi^+(t) = \sup_{s>0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)},\ 0 < t < \infty, \tag{4.70}$$

los índices de Boyd inferior y superior se pueden definir como índices de dilatación de φ, es decir

$$i_\varphi = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} \tag{4.71}$$

y

$$I_\varphi = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_\varphi^+(t)}{\log t} \tag{4.72}$$

respectivamente (ver [3], página 277 o [44] página 54). Se sabe que

$$0 \leq i_\varphi \leq I_\varphi \leq 1.$$

Suponiendo además que $i_\varphi > 0$ se puede probar que

$$\varphi(st) \leq C_\epsilon \max\{s^{i_\varphi - \epsilon}, s^{I_\varphi + \epsilon}\}\varphi(t), \quad s, t > 0 \tag{4.73}$$

y

$$\varphi(st) \geq C_\epsilon \min\{s^{i_\varphi - \epsilon}, s^{I_\varphi + \epsilon}\}\varphi(t), \quad s, t > 0 \tag{4.74}$$

para todo $\epsilon > 0$ y un $C_\epsilon > 0$ (ver [42], página 3). En este trabajo solo consideraremos los espacios de Orlicz con peso con los índices de Boyd no triviales, es decir, $0 < i_\varphi \leq I_\varphi < 1$, pues sólo en este caso tenemos caracterización con bases de ondículas.

Un ejemplo de espacios de Orlicz con peso son los espacios de Lebesgue con peso $L^p(w)$.

Ejemplo 4.5.3. *Cuando* $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, *entonces* $L^\Phi(w) = L^p(w)$ *y* $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$. *Por lo tanto,* $h_\varphi^+(t) = t^{\frac{1}{p}}$ *y esto implica que* $i_\varphi = I_\varphi = \frac{1}{p}$.

En el resultado siguiente, probamos que una base de ondículas de regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$, es una base incondicional para los espacios de Orlicz con peso $L^{\Phi}(w)$ (ver también [52]) para un peso apropiado w, puesto que la norma en estos espacios se puede caracterizar en términos de una función quadrática.

Teorema 4.5.4. *Sea $L^{\Phi}(w)$ un espacio de Orlicz con peso $w \in \mathrm{W}(\mathbb{R}^d)$ cuyos índices de Boyd satisfacen $0 < i_\varphi \le I_\varphi < 1$ y sea $\mathcal{W} = \{\psi_Q^\varepsilon : Q \in \mathcal{D},\ \varepsilon \in E\}$ una base de ondículas en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con $\psi^\varepsilon \in \mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$. Si $w \in A_{p^\Phi}(\mathbb{R}^d)$, donde $p^\Phi = \frac{1}{I_\varphi}$, cualquier función $f \in L^{\Phi}(w)$ se puede escribir en la forma*

$$f = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{D}} \langle f, \psi_Q^l \rangle \psi_Q^l \tag{4.75}$$

con la convergencia en $L^{\Phi}(w)$. Además, se tiene la equivalencia

$$\|f(\cdot)\|_{L^{\Phi}(w)} \approx \|S_\psi f(\cdot)\|_{L^{\Phi}(w)}, \quad \forall\ f \in L^{\Phi}(w) \tag{4.76}$$

donde

$$S_\psi f(x) = \Big(\sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_Q^l \rangle|^2 \chi_Q(x) |Q|^{-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.77}$$

De (4.77) se deduce que la convergencia de (4.75) es incondicional en $L^{\Phi}(w)$. Este resultado es también cierto para la ondícula de Haar.

Para la demostración usaremos el siguiente teorema de extrapolación adaptado a nuestra situación:

Teorema 4.5.5. *([13]) Sea $\mathcal{F}$ una familia de pares de funciones medibles no negativas (f, g). Supongamos que para algún $1 \le p_0 < \infty$, y para todo peso $w \in A_{p_0}$ se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{p_0} w(x) dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^{p_0} w(x) dx, \quad \textit{para todo } (f, g) \in \mathcal{F}. \tag{4.78}$$

Entonces, si $L^{\Phi}(w)$ es un espacio de Orlicz con peso tal que los índices de Boyd satisfacen $0 < i_\varphi \le I_\varphi < 1$ y $w \in A_{p^\Phi}$, $p^\Phi = \frac{1}{I_\varphi}$ tenemos

$$\|f\|_{L^{\Phi}(w)} \le C \|g\|_{L^{\Phi}(w)}, \quad \textit{para todo } (f, g) \in \mathcal{F}. \tag{4.79}$$

Demostración. (**Demostración del Teorema 4.5.4**) En [26] (ver también [1]) se demuestra que

$$\|f\|_{L^p(w)} \approx \|S_\psi(f)\|_{L^p(w)} \tag{4.80}$$

para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, cuando $\psi^\varepsilon \in \mathcal{R}^{0,M}$. Consideramos la familia $\mathcal{F} = \{(|f|, S_\psi(f)) : S_\psi(f) \in L^p(w)\}$. De la equivalencia (4.80), existe una constante $C_1 > 0$ tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^d} |S_\psi(f)|^p w(x)dx,$$

para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$. Entonces, del Teorema 4.5.5 se obtiene

$$\|f\|_{L^\Phi(w)} \leq C_1 \|S_\psi(f)\|_{L^\Phi(w)} \tag{4.81}$$

cuando $w \in A_{p^\Phi}$. Para la desigualdad contraria tomamos $\mathcal{F} = \{(S_\psi(f), |f|), f \in L^p(w)\}$. De la equivalencia (4.80) existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |S_\psi(f)|^p w(x)dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)dx$$

para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mathbb{R}^d)$. Entonces, del Teorema 4.5.5 tenemos

$$\|S_\psi(f)\|_{L^\Phi(w)} \leq C_2 \|f(x)\|_{L^\Phi(w)} \tag{4.82}$$

cuando $w \in A_{p^\Phi}$. Las desigualdades (4.81) y (4.82) prueban (4.76). Para probar (4.75) usamos el hecho de que los operadores de proyección $P_j(f) = \sum_{s=-\infty}^{j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{s,k}\rangle \psi_{s,k}$ son acotados en $L^\Phi(w)$. Puede aplicarse el Teorema 4.5.5 de nuevo puesto que es conocido que P_j está acotado en $L^p(w)$ (ver también [52]).

□

4.5.2. Funciones de democracia

Nuestro resultado principal en esta sección calcula (salvo constantes multiplicativas) las funciones de democracia por la izquierda y por la derecha de una base de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M}$ en $L^\Phi(w)$ en términos de su función fundamental.

Consideraremos el caso $L = 1$ ya que la suma finita que aparece en $S_\psi(f)$ solo hace variar las constantes en las estimaciones.

La equivalencia dada en (4.76) nos permite estudiar las funciones de democracia de los espacios de Orlicz con peso estudiando las funciones de democracia de los correspondientes espacios de sucesiones.

Definición 4.5.6. *Sean $w \in \mathrm{W}$ y $\Phi \in \mathcal{Y}$. Definimos $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ como el espacio de todas las sucesiones $\boldsymbol{s} = \{s_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ ($\mathcal{D}$ cubos diádicos en $\mathbb{R}^d$) de números complejos tales que*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} = \Big\| \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |s_Q|^2 \chi_Q(x) |Q|^{-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^\Phi(w)} < \infty. \tag{4.83}$$

El espacio $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ es un espacio normado. Por el Teorema 4.5.4 cuando $w \in A_{p^\Phi}$, $p^\Phi = \frac{1}{I_\varphi}$ y $\{\psi_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ es una base de ondículas en $\mathcal{R}^{0,M}$

$$\|f\|_{L^\Phi(w)} \approx \|\{\langle f, \psi_Q\rangle : Q \in \mathcal{D}\}\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}$$

y por lo tanto, los espacios $L^\Phi(w)$ y $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ son isomorfos mediante la aplicación $f \longmapsto \{\langle f, \psi_Q\rangle\}_{Q\in\mathcal{D}}$. Con esta aplicación consideraremos la base canónica $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ (ver subsección 4.3.2).

Proposición 4.5.7. *Sean* $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ *un espacio de Orlicz de sucesiones con peso tal que* $i_\varphi > 0$, $w \in \mathrm{W}$ *un peso en* $\mathbb{R}^d$ *y* $\Phi \in \mathcal{Y}$.

i) Si $\Gamma \subset \mathcal{D}$ *es una familia de cubos disjuntos dos a dos entonces*

$$\Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} = \Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(\cdot)}{\varphi(w(Q))}\Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}. \tag{4.84}$$

ii) Además, si $w \in A_\infty^d \cap B_\infty^d$, *para cualquier* $\tau > 0$ *y cualquier* $N \in \mathbb{N}$ *existe una familia de cubos disjuntos* $\Gamma \subset \mathcal{D}$, *con* $|\Gamma| = N$, *tal que*

$$\Big\|\sum_{Q\in\mathcal{D}} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} \approx \frac{\varphi(N\tau)}{\varphi(\tau)}. \tag{4.85}$$

Demostración. Para un elemento de la base $\mathcal{B}_c$, de (4.83) tenemos

$$\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} = \Big\|\Big(\frac{\chi_Q(\cdot)}{|Q|}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^\Phi(w)} = \frac{\|\chi_Q(\cdot)\|_{L^\Phi(w)}}{|Q|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varphi(w(Q))}{|Q|^{\frac{1}{2}}} \tag{4.86}$$

por el Lema 4.5.2. Por lo tanto, usando de nuevo (4.83) tenemos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} &= \Big\|\Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} \frac{|Q|\chi_Q(\cdot)|Q|^{-1}}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^\Phi(w)} \\ &= \Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q}{\varphi(w(Q))}\Big\|_{L^\Phi(w)}\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida a que los cubos en Γ son disjuntos dos a dos.

ii) Dado $\tau > 0$, en la Proposición 4.1.3 se demuestra que existe una familia de cubos diádicos disjuntos $\Gamma = \{R_1, R_2, \ldots, R_N\}$ tal que $w(R_j) \approx \tau$, $j = 1, 2, \ldots, N$. En este caso tenemos, debido a i),

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} &= \Big\|\sum_{j=1}^N \frac{\chi_{R_j}(\cdot)}{\varphi(w(R_j))}\Big\|_{L^\Phi(w)} \approx \frac{1}{\varphi(\tau)}\Big\|\bigcup_{j=1}^N \chi_{R_j}\Big\|_{L^\Phi(w)} \\ &= \frac{1}{\varphi(\tau)}\varphi(w\Big(\bigcup_{j=1}^N R_j\Big)) \approx \frac{\varphi(N\tau)}{\varphi(\tau)}.\end{aligned} \tag{4.87}$$

donde la penúltima equivalencia se debe al Lema 4.5.2 y la definición de $\varphi \in \Delta_2$.

$\square$

Nota 4.5.8. *De la parte ii) de la Proposición 4.5.7 se deduce que cuando $w \in A_\infty^d \cap B_\infty^d$.*

$$h_r(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \gtrsim \sup_{\tau>0} \frac{\varphi(N\tau)}{\varphi(\tau)} = h_\varphi^+(N)$$

y

$$h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \lesssim \inf_{\tau>0} \frac{\varphi(N\tau)}{\varphi(\tau)} := h_\varphi^-(N).$$

Nuestro objetivo es probar que las funciones de democracia por la derecha y por la izquierda de $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ coinciden con h_φ^+ y h_φ^- (ver Nota 4.5.8) con algunas condiciones sobre $w \in \mathrm{W}$. Comenzamos con un Lema en el que se linealiza la función cuadrado (ver (4.77)) de $\widetilde{1}_\Gamma$ con $\Gamma \subset \mathcal{D}$, es decir

$$S_\psi(\widetilde{1}_\Gamma)(x) = \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.88}$$

Lema 4.5.9. *Sea $w \in A_\infty^d(\mathbb{R}^d)$ (ver sección 4.3) y φ creciente tal que $i_\varphi > 0$. Si $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito se tiene la siguiente equivalencia puntual para $x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q$*

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\chi_{Q_x}(x)}{\varphi(w(Q_x))}, \tag{4.89}$$

donde Q_x denota el cubo más pequeño de Γ que contiene a x.

Demostración. Tenemos la siguiente estimación puntual

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{Q\in\Gamma} \varphi(w(Q))^{-2}\chi_{Q_x}(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \quad &\leq \quad \Big(\sum_{\substack{Q\supset Q_x\\ Q\in\mathcal{D}}} \frac{1}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(w(Q_x^j))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \chi_{Q_x}(x) \end{aligned} \tag{4.90}$$

donde Q_x^j denota el único cubo de medida $2^{jd}|Q_x|$ que contiene a Q_x. Ahora puesto que $Q_x := Q_x^0 \subset Q_x^1 \subset Q_x^2 \subset \ldots$ podemos usar la condición $w \in A_\infty^d$ (ver (4.18)) para obtener que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{w(Q_x)}{w(Q_x^j)} \leq C_w\Big(\frac{|Q_x|}{|Q_x^j|}\Big)^\delta = C_w 2^{-jd\delta}.$$

Por eso tenemos

$$w(Q_x^j) \geq C_w^{-1} w(Q_x) 2^{jd\delta}$$

y

$$\varphi(w(Q_x^j)) \geq \varphi(C_w^{-1} w(Q_x) 2^{jd\delta}).$$

Entonces,

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(w(Q_x^j))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi((C_w)^{-1} w(Q_x) 2^{jd\delta})^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Puesto que $i_\varphi > 0$, por (4.74) podemos escoger un ϵ tal que $0 < \epsilon < i_\varphi$ y encontrar una constante $C_\epsilon > 0$ tal que $\varphi((C_w)^{-1} 2^{jd\delta} \varphi(w(Q_x)) \geq C_\epsilon ((C_w^2)^{-1} 2^{jd\delta})^{(i_\varphi - \epsilon)} \varphi(w(Q_x))$.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(w(Q_x^j))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \quad &\leq \quad \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{C_\epsilon ((C_w)^{-1} 2^{jd\delta})^{i_\varphi - \epsilon} \varphi(w(Q_x))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{((C_w)^{(i_\varphi - \epsilon)} C_\epsilon)^{\frac{1}{2}}}{\varphi(w(Q_x))} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jd\delta(i_\varphi - \epsilon)}. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Entonces,

$$\Big(\sum_{Q \in \Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{\chi_{Q_x}(x)}{\varphi(w(Q_x))} \lesssim \Big(\sum_{Q \in \Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.92}$$

donde la última desigualdad en (4.92) es cierta porque la suma en el miembro derecho contiene al menos el cubo Q_x (posiblemente más). □

Para conseguir nuestro objetivo necesitamos introducir los conceptos de luz y sombra de un cubo en una colección finita de cubos diádicos Γ y también los conceptos de cubos **sombreados** y cubos **iluminados** introducidos en [29].

Sea $\Gamma_{\text{mín}}$ el conjunto de los cubos **minimales** en Γ, es decir

$$\Gamma_{\text{mín}} = \Big\{Q_x \in \Gamma : x \in \bigcup_{Q \in \Gamma} Q\Big\}.$$

Por el Lema 4.5.9 se puede ver que

$$\Big(\sum_{Q \in \Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \approx \Big(\sum_{Q \in \Gamma_{\text{mín}}} \frac{\chi_{Q_x}(x)}{\varphi(w(Q_x))^2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.93}$$

Por lo tanto, solo los cubos de $\Gamma_{\text{mín}}$ serán relevantes para nuestros propósitos. No obstante, puesto que los cubos en $\Gamma_{\text{mín}}$ no son necesariamente disjuntos dos a dos, necesitamos de una mejor selección.

Comenzamos mostrando con un ejemplo los conceptos de sombra y luz de un cubo en una colección finita de cubos diádicos Γ. Supongamos que tenemos una familia de N cubos Γ ordenados por generaciones, $\Gamma = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$ (ver Fig. 1). Proyectando un rayo de luz, algunas partes de un cubo Q_i reciben luz (ver Fig. 2), llamaremos tales partes (*Luz* de Q_i) *Light*(Q_i). Otras porciones del cubo Q_i estarán sombreadas, llamaremos a estas porciones del cubo (*Sombra* de Q_i) *Shade*(Q_i). Las partes sombreadas de los cubos dados en la Fig.1 más abajo, están representadas con líneas más gruesas en la Fig. 2. Se observa que los cubos minimales son los que tienen una porción de luz, es decir, $x \in$ *Light*(Q_i) si y sólo si $Q_x = Q_i$. Se observa también que el conjunto $\{\textit{Light}(Q) : Q \in \Gamma_{\text{mín}}\}$ es una colección disjunta.

Vamos a dar las definiciones precisas de la exposición anterior. Dado un conjunto finito $\Gamma \subset \mathcal{D}$ fijo, para cualquier $Q \in \Gamma$ definimos la *sombra* de Q como la unión de todos los cubos de Γ estrictamente contenidos en Q, o sea,

$$\textit{Shade}(Q) = \bigcup \Big\{ R : R \in \Gamma, R \subsetneq Q \Big\}.$$

Definimos la *Luz* de Q de la siguiente forma:

$$\textit{Light}(Q) = Q \backslash \textit{Shade}(Q).$$

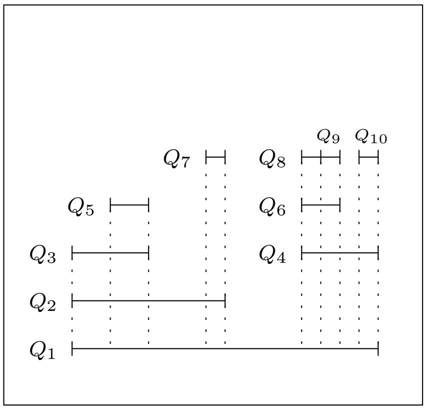


Figure 1: $\Gamma = \{Q_1, \dots, Q_{10}\}$

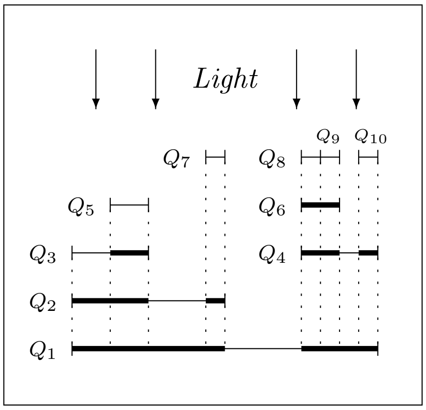


Figure 2: Shade & Light

Está claro que $Q \in \Gamma_{\text{mín}}$ si y sólo si *Light(Q)* $\neq \emptyset$, además

$$\bigcup_{Q \in \Gamma} Q = \bigcup_{Q \in \Gamma_{\text{mín}}} \textit{Light}(Q).$$

Los conjuntos en la última unión de la igualdad anterior son disjuntos dos a dos. Por eso, debido al Lema 4.5.9 tenemos

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma}\frac{\chi_Q(x)}{\varphi(w(Q))^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \approx \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}}\frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{\varphi(w(Q))}. \tag{4.94}$$

donde la suma en el miembro derecho contiene como máximo un término distinto de cero para cada $x\in\mathbb{R}^d$. Clasificaremos los cubos como sombreados si la sombra es una parte grande del cubo o iluminado si es al contrario. Es decir, un cubo $Q\in\Gamma$ se dice **sombreado** si $|Shade(Q)|>\frac{2^d-1}{2^d}|Q|$ y escribimos Γ_S para la colección de los cubos de Γ que son sombreados. Un cubo Q de Γ se dice **iluminado** si no es sombreado, es decir, si $|Light(Q)|\geq\frac{1}{2^d}|Q|$. Escribimos Γ_L para la colección de todos los cubos de Γ que son iluminados.

Nota 4.5.10. *Observe que $\Gamma_L\subset\Gamma_{\text{mín}}$ y por el lema 4.3 en [29] tenemos*

$$\frac{2^d-1}{2^d}|\Gamma|\leq|\Gamma_L|\leq|\Gamma_{\text{mín}}|\leq|\Gamma|,\quad \forall\ \Gamma\subset\mathcal{D}\ finito.$$

Proposición 4.5.11. *Sean $\mathfrak{s}L^{\Phi}(w)$ un espacio de sucesiones de Orlicz con peso tal que $i_{\varphi}>0$, $w\in A_{\infty}^d$ un peso en $\mathbb{R}^d$ y $\Phi\in\mathcal{Y}$. Entonces, para todo $\Gamma\subset\mathcal{D}$ finito se tiene*

$$\Big\|\sum_{Q\in\Gamma}\frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{\Phi}(w)}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^{\Phi}(w)}\lesssim h_{\varphi}^{+}(N). \tag{4.95}$$

En particular

$$h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}L^{\Phi}(w))\lesssim h_{\varphi}^{+}(N).$$

Demostración. Dado un conjunto de cubos diádicos $\Gamma=\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_N\}$, por (4.94) tenemos

$$\Big\|\sum_{Q\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{\Phi}(w)}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^{\Phi}(w)}\approx\Big\|\sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}}\frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{\varphi(w(Q))}\Big\|_{\mathfrak{s}L^{\Phi}(w)}. \tag{4.96}$$

Por eso, es suficiente estimar la cantidad en el miembro derecho de (4.96). Sea $\lambda=h_{\varphi}^{+}(|\Gamma_{\text{mín}}|)$; se tiene que $\varphi(w(Q)|\Gamma_{\text{mín}}|)\leq\lambda\varphi(w(Q))$ para todo $Q\in\Gamma_{\text{mín}}$. Puesto que el conjunto $\{Light(Q):Q\in\Gamma_{\text{mín}}\}$ es una colección de elementos disjuntos dos a dos y Φ es creciente, entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \Phi\Big(\frac{\sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} \frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{\varphi(w(Q))}}{\lambda}\Big) w(x)dx \\
&= \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} \Phi\Big(\frac{1}{\lambda\varphi(w(Q))}\Big) w(Light(Q)) \\
&\leq \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} \Phi\Big(\frac{1}{\varphi(w(Q)|\Gamma_{\text{mín}}|}\Big) w(Q) \\
&= \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} \Phi\Big(\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{w(Q)|\Gamma_{\text{mín}}|}\Big)\Big) w(Q) = 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por (4.96), la Nota 4.5.10 y puesto que la función h_φ^+ es no decreciente tenemos

$$
\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{e_Q}{\|e_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} \lesssim h_\varphi^+(|\Gamma_{\text{mín}}|) \leq h_\varphi^+(|\Gamma|).
$$

□

Proposición 4.5.12. *Sean $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ un espacio de sucesiones de Orlicz con peso tal que $i_\varphi > 0$, $w \in B_p^d$ un peso en $\mathbb{R}^d$ y $\Phi \in \mathcal{Y}$. Entonces, para todo conjunto $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito se tiene*

$$
\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} \gtrsim h_\varphi^-(N). \tag{4.97}
$$

En particular,

$$
h_l(N;\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \gtrsim h_\varphi^-(N).
$$

Demostración. Usando (4.94) y que $\Gamma_L \subset \Gamma_{\text{mín}}$, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} &\approx \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} \frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{\varphi(w(Q))} \Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} \\
&\gtrsim \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_L} \frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{\varphi(w(Q))} \Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}.
\end{aligned}
$$

Sea $\lambda < h_\varphi^-(2^{-d}C_w|\Gamma_L|)$; se tiene que $\lambda\varphi(w(Q)) < \varphi(w(Q)2^{-d}C_w|\Gamma_L|)$ para cualquier $Q \in \Gamma_L$. Usando que $w \in B_p^d$ y puesto que $|Light(Q)| > 2^{-d}|Q|$ para $Q \in \Gamma_L$ deducimos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \Phi\Big(\frac{\sum_{Q\in\Gamma_L} \frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{\varphi(w(Q))}}{\lambda}\Big) w(x)dx \\
&= \sum_{Q\in\Gamma_L} \Phi\Big(\frac{1}{\lambda\varphi(w(Q))}\Big) w(Light(Q)) \\
&> \sum_{Q\in\Gamma_L} \Phi\Big(\frac{1}{\varphi(2^{-d}C_w w(Q)|\Gamma_L|)}\Big) C_w 2^{-d} w(Q) \\
&= \sum_{Q\in\Gamma_L} \Phi\Big(\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{2^{-d}C_w w(Q)|\Gamma_L|}\Big)\Big) 2^{-d} w(Q) C_w = 1
\end{aligned}
$$

Entonces por (4.68) y la Nota 4.5.10 obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^\Phi(w)} \geq h_\varphi^-(2^{-d}C_w|\Gamma_L|) \\
&\geq h_\varphi^-(C_w 2^{-d}(1-2^{-d})|\Gamma|).
\end{aligned}
$$

Ahora usando (4.74) se tiene

$$
\begin{aligned}
&h_\varphi^-(C_\epsilon(2^{-d}(1-2^{-d})|\Gamma|) = \inf_{t>0} \frac{\varphi(C_\epsilon(2^{-d}(1-2^{-d})|\Gamma|t)}{\varphi(t)} \\
&\geq C \inf_{t>0} \frac{\varphi(|\Gamma|t)}{\varphi(t)} = C h_\varphi^- |\Gamma|.
\end{aligned}
$$

Esto prueba el resultado.

□

Combinando la Nota 4.5.8 y las Proposiciones 4.5.11 y 4.5.12 se obtiene el resultado siguiente:

Teorema 4.5.13. *Sean* $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$ *un espacio de sucesiones de Orlicz con peso tal que* $i_\varphi > 0$, $w \in A_\infty^d \cap B_p^d$ *para algún* p*, un peso en* $\mathbb{R}^d$ *y* $\Phi \in \mathcal{Y}$*. Entonces, para todo* $\Gamma \subset \mathcal{D}$ *finito tenemos*

$$h_r(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \approx h_\varphi^+(N) \quad y \quad h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \approx h_\varphi^-(N).$$

Con el isomorfismo mencionado anteriormente entre los espacios $L^\Phi(w)$ y los espacios $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$, el esquema de transferencia abstracta diseñado en la sección 6.2 de [27], nos permite enunciar el Teorema anterior de la siguiente forma, teniendo en cuenta el Teorema 4.5.4:

Teorema 4.5.14. *Sean $L^\Phi(w)$ un espacio de Orlicz con peso tal que $i_\varphi > 0$, $w \in A_{p^\Phi}$ un peso en $\mathbb{R}^d$, $\Phi \in \mathcal{Y}$ y $\mathcal{W} = \{\psi_Q^\varepsilon : Q \in \mathcal{D}, \varepsilon \in E\}$ una base de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$. Entonces tenemos*

$$h_r(N; \mathcal{W}, L^\Phi(w)) \approx h_\varphi^+(N) \quad y \quad h_l(N; \mathcal{W}, L^\Phi(w)) \approx h_\varphi^-(N).$$

Si $\Phi(t) = t^p$ del Teorema 4.5.14 y del Ejemplo 4.5.3 deducimos que las bases de ondículas admisibles son democráticas en los espacios de Lebesgue con peso $L^p(w)$ si $w \in A_p$.

Corolario 4.5.15. *Sean $\Phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ un peso en $\mathbb{R}^d$ y $\mathcal{W} = \{\psi_Q^\varepsilon : Q \in \mathcal{D},\ \varepsilon \in E\}$ una base de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$. Entonces tenemos*

$$h_r(N; \mathcal{W}, L^p(w)) \approx h_l(N; \mathcal{W}, L^p(w)) \approx N^{\frac{1}{p}}. \tag{4.98}$$

Nota 4.5.16. *Se prueba en el lema 5.2 de [29] que si $h_\varphi^+(N) \leq C_1 h_\varphi^-(N)$ $\forall\ N = 1, 2, 3, \ldots$ $\varphi(t) = t^\alpha$ para algún $\alpha \in (0, \infty)$ y todo $t > 0$. Entonces $L^\Phi(w) = L^p(w)$ con $1 < p < \infty$. Por tanto, los únicos espacios de Orlicz con peso en los que las bases de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M}$ son democráticas son los espacios de Lebesgue con peso $L^p(w)$ para algún $p \in (1, \infty)$.*

4.5.3. Aplicaciones

Usando el Teorema 4.5.13 y aplicando el Teorema 3.6.1 del capítulo 3 obtenemos las inclusiones para los espacios de aproximación y las clases avariciosas de $\mathfrak{s}L^\Phi(w)$

Corolario 4.5.17. *Sean $\Phi \in \mathcal{Y}$ una función de Young tal que $i_\varphi > 0$, $w \in A_\infty^d \cap B_p^d$ un peso en $\mathbb{R}^d$ para algún $p \in [1, \infty)$, $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$. Entonces*

$$\begin{aligned} &\ell^q_{k^\alpha h_\varphi^+(k)}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)) \\ &\hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_\varphi^-(k)}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w)). \end{aligned} \tag{4.99}$$

Más adelante probaremos que estas inclusiones son óptimas en la escala de los espacios de Lorentz discretos con peso $\ell^q_\eta(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^\Phi(w))$ (ver Corolario 5.3.3 y Ejemplo 5.3.4).

Demostración. Para poder aplicar el Teorema 3.6.1 es necesario probar que $h_\varphi^-(N)$ es doblante. Esto se deduce de que φ es doblante (consultar la sección 4.1). □

Corolario 4.5.18. *Sean $\Phi \in \mathcal{Y}$ una función de Young tal que $i_\varphi > 0$, $w \in A_\infty^d \cap B_p^d$ un peso en $\mathbb{R}^d$ para algún $p \in [1, \infty)$. Tomar $\alpha > 0$ y $q, q_0, q_1 \in (0, \infty]$. Entonces*

$$\ell^{\tau_0, q_0}(\mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \ell^{\tau_1, q_1}(\mathfrak{s}L^\Phi(w))$$

cuando $\frac{1}{\tau_1} < \alpha + i_\varphi \leq \alpha + I_\varphi < \frac{1}{\tau_0}$.

Demostración. Para probar la inclusión de la izquierda elegir $\tau > 0$ tal que $\frac{1}{\tau_0} > \frac{1}{\tau} > \alpha + I_\varphi$. Por (4.73), para todo $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$h_\varphi^+(t) \leq C_\epsilon t^{I_\varphi + \epsilon}, \quad t \geq 1.$$

Tomar $\epsilon = \frac{1}{\tau} - \alpha - I_\varphi > 0$ para obtener

$$k^\alpha h_\varphi^+(k) \leq C_\epsilon k^\alpha k^{\frac{1}{\tau} - \alpha} = C_\epsilon k^{\frac{1}{\tau}}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce que $\ell^{\tau,q}(\mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_\varphi^+(k)}(\mathfrak{s}L^\Phi(w))$. Como $\ell^{\tau_0,q_0} \hookrightarrow \ell^{\tau,q}$ cuando $\tau_0 < \tau$ obtenemos el resultado de la inclusión de la izquierda del Corolario 4.5.17.

Para probar la inclusión de la derecha elegir $\tau > 0$ tal que $\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau} < \alpha + i_\varphi$. Por (4.74), para todo $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$h_\varphi^-(t) \geq C_\epsilon t^{i_\varphi - \epsilon}, \quad t \geq 1.$$

Tomar $\epsilon = \alpha + i_\varphi - \frac{1}{\tau} > 0$ para obtener

$$k^\alpha h_\varphi^-(k) \geq C_\epsilon k^\alpha k^{-\alpha + \frac{1}{\tau}} = C_\epsilon k^{\frac{1}{\tau}} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

De aquí se deduce $\ell^q_{k^\alpha h_\varphi^-(k)}(\mathfrak{s}L^\Phi(w)) \hookrightarrow \ell^{\tau,q}(\mathfrak{s}L^\Phi(w))$. Como $\ell^{\tau,q} \hookrightarrow \ell^{\tau_1,q_1}$ cuando $\tau < \tau_1$ obtenemos el resultado deseado de la inclusión derecha del Corolario 4.5.17 □

Usando el algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] los resultados de los dos Corolarios precedentes pueden escribirse en términos de bases de ondículas de regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$, y espacios $L^\Phi(w)$ con $w \in A_{p^\Phi}$, $p^\Phi = \frac{1}{I_\varphi}$ (ver Teorema 4.5.4).

Teorema 4.5.19. *Sean $L^\Phi(w)$ un espacio de Orlicz con peso con los índices de Boyd que satisfacen $0 < i_\varphi \leq I_\varphi < 1$, $w \in A_{p^\Phi}$ un peso en $\mathbb{R}^d$, $\Phi \in \mathcal{Y}$ y $\mathcal{W} = \{\psi_Q^\epsilon : Q \in \mathcal{D}, \epsilon \in E\}$ una base de ondículas de la clase $\mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$. Entonces tenemos*

$$\begin{aligned} &\ell^q_{k^\alpha h_\varphi^+(k)}(\mathcal{W}, L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^\Phi(w)) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{W}, L^\Phi(w)) \\ &\hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_\varphi^-(k)}(\mathcal{W}, L^\Phi(w)). \end{aligned} \tag{4.100}$$

Los dos Corolarios precedentes solo dan inclusiones. Si queremos obtener igualdades se debe tener $h_\varphi^- \approx h_\varphi^+$ y por tanto $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$ con $1 < p < \infty$ (ver Lema 5.2 en [29]). Es decir, $L^\Phi(w) = L^p(w)$ para algún $p \in (1, \infty)$. Pero en este caso todos los resultados que podemos obtener son un caso particular de los contenidos en la subsección 4.4.3.

4.6. Espacios BMO

En esta sección obtendremos las funciones de democracia, salvo constantes multiplicativas, por la izquierda y por la derecha de una base incondicional $\mathcal{B}$ en los espacios de funciones de oscilación média acotada $BMO(\mathbb{R})$ así como las inclusiones de las clases avariciosas y de los espacios de aproximación en los espacios de Lorentz discretos.

4.6.1. Definiciones y resultados preliminares

Empezamos por recordar la definición y las propiedades básicas de los espacios $\mathbf{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

Definición 4.6.1. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^d$. Diremos que f es de oscilación média, acotada, esto es $f \in \boldsymbol{BMO}(\mathbb{R}^d)$ si*

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^d)} = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty, \tag{4.101}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \in \mathbb{R}^d$ y $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx$ denota la média de f con respecto al cubo Q.

Si Φ es una familia de ondículas que tienen suficiente regularidad los espacios $BMO(\mathbb{R}^d)$ se pueden caracterizar usando los coeficientes de ondículas y tal familia de ondículas es una base incondicional de $BMO(\mathbb{R}^d)$ (ver [35] y [24]).

El primer resultado de este tipo fue probado por P. Wojtaszczyk ([76]) y da una caracterización de los espacios $BMO(\mathbb{R})$ en términos de ondículas de Franklin $\mathfrak{F} = \{f_I\}_{I\in\mathcal{D}} \subset L^2(\mathbb{R})$ (ver [33], capítulo 4, para la construción de este tipo de ondículas).

Teorema 4.6.2. *([76]) Sean $BMO(\mathbb{R})$ el espacio de funciones de oscilación média acotada y $\mathfrak{F} = \{f_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ un sistema de ondículas de Franklin. Entonces cualquier $f \in BMO(\mathbb{R})$ se puede escribir de la forma*

$$f = \sum_{I\in\mathcal{D}} \langle f, f_I\rangle f_I \tag{4.102}$$

con la convergencia en $BMO(\mathbb{R})$. Además, se tiene la equivalencia

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R})} \approx \sup_{I\in\mathcal{D}} \Big(\frac{1}{|I|} \sum_{J\subset I} |\langle f, f_I\rangle|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.103}$$

En particular el sistema de Franklin es una base incondicional en $BMO(\mathbb{R})$.

Nota 4.6.3. *Este resultado es válido para ondículas 1-regular en el sentido de Y. Meyer [51], pero hemos preferido enunciar sólo el resultado original de P. Wojaszczyk para ondículas de Franklin.*

4.6.2. Funciones de Democracia

Teniendo en cuenta los resultados en [35, 24] y la Proposición 4.6.2, para obtener las funciones de democracia de bases de ondículas en los espacios $BMO(\mathbb{R})$ basta estudiar su correspondiente espacio de sucesiones.

Definición 4.6.4. *Definimos el espacio de sucesiones de oscilación média acotada **bmo** como el conjunto de todas las sucesiones de números complejos* $\boldsymbol{s} = \{s_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ *tales que*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{bmo} = \sup_{I\in\mathcal{D}} \Big(\frac{1}{|I|}\sum_{J\subset I}|s_J|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{4.104}$$

En el teorema siguiente calculamos, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia de la base canónica $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_I\}_{I\in\mathcal{D}}$, es decir, $\mathbf{e}_I = \{s_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ donde

$$s_J = \begin{cases} 1, & \text{si } J = I, \\ 0, & \text{si } J \neq I. \end{cases}$$

Teorema 4.6.5. *Sea bmo el espacio de sucesiones de oscilación média acotada. Entonces si* $N = 1, 2, 3, \dots$

$$h_r(N;\mathcal{B}_c, bmo) \approx \sqrt{\log N} \quad y \quad h_l(N;\mathcal{B}_c, bmo) \approx 1. \tag{4.105}$$

Demostración. La idea de demostración está tomada de [64]. De (4.104) se obtiene $\|\mathbf{e}_I\|_{bmo} = \frac{1}{|I|^{\frac{1}{2}}}$. Entonces si $\Gamma = \{I_1, \dots, I_N\}$ tenemos,

$$\Big\|\sum_{I\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_I}{\|\mathbf{e}_I\|_{bmo}}\Big\|_{bmo} = \Big\|\sum_{I\in\Gamma}|I|^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_I\Big\|_{bmo} = \sup_{I\in\mathcal{D}}\Big(\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\Gamma}}|J|\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.106}$$

$$= \sup_{I\in\mathcal{D}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\Gamma}}\chi_J(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variables: si $I = [i_l, i_r]$ escribimos $x = i_l + t|I|$ de modo que $dx = dt|I|$. Por tanto

$$\Big\|\sum_{I\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_I}{\|\mathbf{e}_I\|_{bmo}}\Big\|_{bmo} = \sup_{I\in\mathcal{D}}\Big(\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\Gamma}}\int_0^1\chi_J(i_l + t|I|)dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que $\chi_J(i_l + t|I|) = \chi_{\frac{J-i_l}{|I|}}(t)$. Todos los intervalos $\frac{J-i_l}{|I|}$ son diádicos contenidos en $[0,1]$ ya que $J \subset I$. Por tanto cada intervalo diádico $\frac{J-i_l}{|I|}$ coincide con un intervalo $K \in \mathcal{D},\ K \subset [0,1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} h_r(N;\mathcal{B}_c, bmo) &= \sup_{|\Gamma|\le N}\Big\|\sum_{I\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_I}{\|\mathbf{e}_I\|_{bmo}}\Big\|_{bmo} \\ &= \sup_{|\Gamma|\le N}\Big(\sup_{I\in\mathcal{D}}\int_0^1\Big(\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\Gamma}}\chi_{\frac{J-i_l}{|I|}}(t)\Big)dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \sup_{|\widetilde{\Gamma}|\le N}\Big(\int_0^1\Big(\sum_{\substack{K\subset[0,1]\\ K\in\widetilde{\Gamma}}}\chi_K(x)\Big)dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.107}$$

De la desigualdad (4.107), se ve claramente que solo hace falta estimar la norma L^1 de $\sum_{\substack{K\subset[0,1]\\ K\in\widetilde{\Gamma}}} \chi_K(x) = 1_{\widetilde{\Gamma}}$. Sea $|\widetilde{\Gamma}| \leq N$, con $2^n \leq |\widetilde{\Gamma}| < 2^{n+1}$. Sea $\Lambda_j = \{I \in \widetilde{\Gamma} : |I| = 2^{-j},\ j = 0, 1, 2, \ldots\}$. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(\sum_{\substack{K\subset[0,1]\\ K\in\widetilde{\Gamma}}} \chi_K(x)\Big)dx &= \int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{n} \sum_{K\in\Lambda_j} \chi_K(x)\Big)dx \\ &+ \int_0^1 \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{K\in\Lambda_j} \chi_K(x)\Big)dx \equiv I + II.\end{aligned}$$

Por un lado, puesto que en Λ_j existen como mucho 2^j intervalos disjuntos, puesto que si $I \in \Lambda_j,\ I \subset [0,1]$ se tiene

$$I \leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{K\in\Lambda_j} 2^{-j} \leq \sum_{j=0}^{n} 2^{-j}2^j = n \leq \log_2 |\widetilde{\Gamma}| \leq \log_2 N.$$

Por otro lado, puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda_j| = |\widetilde{\Gamma}|$

$$II \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{K\in\Lambda_j} 2^{-j} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|\Lambda_j| \leq \frac{|\widetilde{\Gamma}|}{2^{n+1}} < 1.$$

Por tanto, si $N \geq 2$

$$\begin{aligned} h_r(N; \mathcal{B}_c, bmo) &\leq (1 + \log_2 N)^{\frac{1}{2}} \leq (2\log_2 N)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{\log_2 N}. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Para la desigualdad contraria, dado $N \in \mathbb{N}$ elegimos n tal que $2^n \leq N < 2^{n+1}$. Escribir $I_{j,k} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$ y sea $\mathcal{D}_n = \{I_{j,k} : 0 \leq j \leq n-1,\ 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ de manera que $\mathcal{D}_n$ contiene $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ elementos. Sea Γ tal $\mathcal{D}_n \subset \Gamma \subset \mathcal{D}_{n+1}$. Se tiene

$$\Big\| \sum_{I\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_I}{\|\mathbf{e}_I\|_{bmo}} \Big\|_{bmo} \geq \Big\| \sum_{I\in\mathcal{D}_n} \frac{\mathbf{e}_I}{\|\mathbf{e}_I\|_{bmo}} \Big\|_{bmo} = \Big\| \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{\mathbf{e}_{I_{j,k}}}{\|\mathbf{e}_{I_{j,k}}\|_{bmo}} \Big\|_{bmo}.$$

Tomando $I = [0,1]$ en la definición de *bmo* se deduce

$$\Big\| \sum_{I\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_I}{\|\mathbf{e}_I\|_{bmo}} \Big\|_{bmo} \geq \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} |I_{j,k}| \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} 2^j \Big)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \approx (\log N)^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto,

$$h_r(N; \mathcal{B}_c, bmo) \gtrsim \sqrt{\log_2 N}. \tag{4.109}$$

De las desigualdades (4.108) y (4.109) tenemos $h_r(N;\mathcal{B}_c, bmo) \approx \sqrt{\log_2 N}$.

Para probar la segunda equivalencia, consideremos $I_j = [j, j+1], \quad j = 1, 2, \ldots, N$. Puesto que

$$\|\mathbf{e}_{I_j}\|_{bmo} = |I_j|^{-\frac{1}{2}} = 1$$

entonces tenemos,

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{e}_{I_j}}{\|\mathbf{e}_{I_j}\|_{bmo}} = \begin{cases} 1, & \text{si } I = I_j, \\ 0, & \text{si } I \neq I_j. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{e}_{I_j}}{\|\mathbf{e}_{I_j}\|_{bmo}} \Big\|_{bmo} = 1 \quad y \quad h_l(N;\mathcal{B}_c, bmo) \leq 1. \tag{4.110}$$

Por otro lado, dado $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito, sea I_0 un intervalo de Γ de menor tamaño. Entonces

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{bmo} = \sup_{I\in\mathcal{D}} \Big(\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J\subset I \\ J\in\Gamma}} |J|\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big(\frac{1}{|I_0|} \sum_{\substack{J\subset I_0 \\ J\in\Gamma}} |J|\Big)^{\frac{1}{2}} = 1$$

ya que I_0 es el único elemento de Γ contenido en I_0 por ser de tamaño mínimo. Por tanto, $h_l(N;\mathcal{B}_c, bmo) \geq 1$ que junto con la desigualdad (4.110) prueba el resultado.

□

Com el isomorfismo mencionado anteriormente entre los espacios $BMO(\mathbb{R})$ y los espacios *bmo*, el esquema de transferencia abstracta diseñado en la sección 6.2 de [27], nos permite enunciar el Teorema anterior de la siguiente forma, teniendo en cuenta el Teorema 4.6.2:

Teorema 4.6.6. *Sean $BMO(\mathbb{R})$ el espacio de oscilación média acotada y $\mathcal{W} = \{\psi_I : I \in \mathcal{D}\}$ una base de ondículas de Franklin. Entonces si $N = 1, 2, 3, \ldots$*

$$h_r(N;\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) \approx \sqrt{\log N} \quad y \quad h_l(N;\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) = 1.$$

4.6.3. Aplicaciones

Usando el Teorema 4.6.5 y aplicando el Teorema 3.6.1 del capítulo 3 obtenemos las inclusiones para los espacios de aproximación y las clases avariciosas de *bmo*.

Corolario 4.6.7. *Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$. Tenemos,*

$$\begin{aligned} &\ell^q_{k^\alpha\sqrt{\log k}}(\mathcal{B}_c, bmo) \hookrightarrow \mathcal{G}^\alpha_q(\mathcal{B}_c, bmo) \\ &\hookrightarrow \mathcal{A}^\alpha_q(\mathcal{B}_c, bmo) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha}(\mathcal{B}_c, bmo) = \ell^{\frac{1}{\alpha},q}(\mathcal{B}_c, bmo) \end{aligned} \tag{4.111}$$

Nota 4.6.8. *Las inclusiones del Corolario 4.6.7 no son las mejores posibles para los espacios de aproximación ya que un resultado de R. Rochberg y M. Taibleson ([65]) (ver también [35], Proposición 11.6) prueba que*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}_c, bmo) = \mathcal{A}_q^\alpha(\ell^\infty) = \ell^{\frac{1}{\alpha},q},$$

para todo $\alpha > 0$ *y* $0 < q \leq \infty$.

Nota 4.6.9. *Para* $0 < r < \infty$ *se puede definir el espacio* bmo_r *como el conjunto de todas las sucesiones de números complejos* $\boldsymbol{s} = \{s_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ *tales*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{bmo_r} = \sup_{I\in\mathcal{D}} \Big(\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} (|J|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}|s_J|)^r\Big)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Argumentos similares a los del Teorema 4.6.5 permiten probar que

$$h_r(N;\mathcal{B}_c, bmo_r) \approx (\log N)^{\frac{1}{r}} \ \text{y} \ h_l(N;\mathcal{B}_c, bmo_r) \approx 1. \tag{4.112}$$

Solo es necesario observar que $\|\boldsymbol{e}_I\|_{bmo_r} = |I|^{-\frac{1}{2}}$ *y por tanto si* $\Gamma \subset \mathcal{D}$ *es finito se tiene*

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{bmo_r} = \sup_{I\in\mathcal{D}} \Big(\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\Gamma}} |J|\Big)^{\frac{1}{r}}$$

que coincide con (4.106) salvo el exponente.

Usando el algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] el resultado del Corolario 4.6.7 puede escribirse em términos de bases de ondículas de Franklin y los espacios $BMO(\mathbb{R})$.

Teorema 4.6.10. *Sean* $\alpha > 0$ *y* $0 < q \leq \infty$. *Sea* $\mathfrak{F} = \{f_I\}_{I\in\mathcal{D}}$. *Entonces tenemos*

$$\begin{aligned} &\ell^q_{k^\alpha\sqrt{\log k}}(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) \\ &\hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha}(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) = \ell^{\frac{1}{\alpha},q}(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Nota 4.6.11. *En este caso las inclusiones no son óptimas en la escala de espacios de Lorentz discretos ya que* $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R})) = \ell^{\frac{1}{\alpha},q}(\mathfrak{F}, BMO(\mathbb{R}))$ *(ver [65] o las discusiones que siguen a la Nota 5.2.4).*

4.7. Espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$

En esta sección obtendremos las funciones de democracia de las bases de ondículas en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, (Teorema 1.2.24) así como las inclusiones de los espacios de aproximación y las clases avariciosas en espacios de Lorentz discretos. Empezamos por recordar la definición y las propiedades básicas de los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, $0 < p, q \leq \infty$ necesarias para la prueba de nuestros resultados.

4.7.1. Definiciones y resultados preliminares

Comenzaremos por recordar dos conceptos importantes como son el de función de distribución asociada a una función medible y finita en casi todo punto, el de reordenamiento no creciente de una función de este tipo y el de función maximal. Denotamos por (Ω, μ) un espacio de medida.

Definición 4.7.1. *Sea* $\mathcal{M}(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f$ *es* μ*-medible y finita* μ*-casi en todo punto*$\}$. *Se define la función de distribución asociada a* f, $\mu_f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$, *por*

$$\mu_f(s) = \mu(\{t \in \Omega : |f(t)| > s\}). \tag{4.113}$$

Definición 4.7.2. *Sea* $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. *Se define el reordenamiento no creciente de* f, $f^* : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$, *por*

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s \in [0, \infty) : \mu_f(s) \leq t\} \tag{4.114}$$

con la convención $\text{ínf}\, \emptyset = \infty$.

Definición 4.7.3. *Sea* $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. *Se denomina* ***función maximal de*** f *y se denota por* f^{**} *la función definida por*

$$f^{**} = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0. \tag{4.115}$$

Definición 4.7.4. *Dos funciones* $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ *se dicen equimedibles (o equidistribuidas) si* $\mu_f = \mu_g$.

En este trabajo consideraremos funciones f definidas en $\mathbb{R}^d$ y medible-Lebesgue.

Los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ se definen de la siguiente forma:

Definición 4.7.5. *([71])Para* $0 < p, q \leq \infty$, *el espacio de Lorentz* $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ *es el conjunto de todas funciones medibles* f *definidas en* $\mathbb{R}^d$, *tal que*

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & si\ 0 < q < \infty, \\ \\ \sup_{0<t<\infty}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}, & si\ q = \infty, \end{cases} \tag{4.116}$$

es finita.

Cuando $p = q$, $0 < p \leq \infty$, estos espacios coinciden con los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$, y

$$\|f\|_{p,p} = \|f\|_p.$$

Para $0 < p, q < \infty$, se tiene

$$\|f\|_{p,q} = \Big(q \int_0^\infty t^q \mu_f(t)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.117}$$

Puede probarse fácilmente que $\|\lambda f\|_{p,q} = |\lambda| \|f\|_{p,q}$. Aunque en general el funcional $f \longrightarrow \|f\|_{p,q}$ no sea una norma, el espacio $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Banach invariante por reordenamiento con una norma equivalente a $\|\cdot\|_{p,q}$ si $1 < p, q < \infty$, o bien si $p = q = 1$. Esto se consigue sustituyendo f^* por f^{**} en la definición (4.116).

Definición 4.7.6. *([3]) Sea $1 < p \le \infty$ y $0 < q \le \infty$. Si f es medible en $\mathbb{R}^d$ definimos*

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}, & si\ 0 < q < \infty \\ \\ \sup_{t>0}(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)), & si\ q = \infty. \end{cases} \tag{4.118}$$

Puede probarse (ver [3]) que los funcionales $f \longmapsto \|\cdot\|_{p,q}$ y $f \longmapsto \|\cdot\|_{(p,q)}$, son equivalentes cuando $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, con, $\|f\|_{p,q} \le \|f\|_{(p,q)} \le \frac{p}{p-1}\|f\|_{p,q}$ y que $\|f\|_{(p,q)}$ es una norma en $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$.

Observamos que para un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$ y $0 < p, q \le \infty$ se tiene

$$\|\chi_E\|_{p,q} = \Big(q \int_0^1 t^q |E|^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} = |E|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.119}$$

Para futuras referencias vamos a probar el siguiente resultado elemental que da una caracterización discreta de los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$.

Proposición 4.7.7. *Sean $0 < p, q < \infty$.*

i) Si $a > 1$ tenemos

$$\|f\|_{p,q} \approx \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{kq} |\{x : |f(x)| \ge a^k\}|^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

ii) Si $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ y $a > \max\{1, 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}$

$$\|f\|_{p,q} \approx \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{kq} |\{x : a^k \le |f(x)| < a^{k+1}\}|^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. (i) Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,q}^q &= q\int_0^\infty t^q|\{x:|f(x)|\geq t\}|^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}\\
&= q\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{a^k}^{a^{k+1}} t^q|\{x:|f(x)|\geq t\}|^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}\\
&\leq q\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{a^k}^{a^{k+1}} t^q|\{x:|f(x)|\geq a^k\}|^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\{x:|f(x)|\geq a^k\}|^{\frac{q}{p}}(a^{(k+1)q}-a^{kq})\\
&= (a^q-1)\sum_{k\in\mathbb{Z}}a^{kq}|\{x:|f(x)|\geq a^k\}|^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,q}^q &\geq q\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{a^k}^{a^{k+1}} t^q|\{x:|f(x)|\geq a^{k+1}\}|^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\{x:|f(x)|\geq a^{k+1}\}|^{\frac{q}{p}}(a^{(k+1)q}-a^{kq})\\
&= (1-a^{-q})\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\{x:|f(x)|\geq a^{k+1}\}|^{\frac{q}{p}}a^{(k+1)q}\\
&= (1-a^{-q})\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\{x:|f(x)|\geq a^{k}\}|^{\frac{q}{p}}a^{kq}
\end{aligned}$$

(ii) Sean

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}a^{kq}|\{x:|f(x)|\geq a^k\}|^{\frac{q}{p}}\\
II &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}a^{kq}|\{x:a^k\leq|f(x)|< a^{(k+1)}\}|^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Está claro que $II\leq I$. Para probar la desigualdad contraria, escribimos

$$\{x:|f(x)|\geq a^k\}=\{x:a^k\leq|f(x)|<a^{k+1}\}\cup\{x:|f(x)|\geq a^{k+1}\}$$

donde la unión en el miembro derecho es disjunta (c.t.p) y por lo tanto tenemos

$$|\{x:|f(x)|\geq a^k\}|^{\frac{p}{q}}=(|\{x:a^k\leq|f(x)|<a^{k+1}\}|+|\{x:|f(x)|\geq a^{k+1}\}|)^{\frac{q}{p}}.$$

Ahora usamos la siguiente desigualdad: para cualquier $r>0$ y $c,d\geq 0$ se cumple

$$(c+d)^r\leq C(r)(c^r+d^r),$$

con $C(r) = \text{máx}\{1, 2^{r-1}\}$, y obtenemos

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{kq} C(\frac{q}{p}) |\{x : a^k \leq |f(x)| < a^{k+1}\}|^{\frac{q}{p}} \\ &+ \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{kq} C(\frac{q}{p}) |\{x : |f(x)| \geq a^{k+1}\}|^{\frac{q}{p}} \\ &= C(\frac{q}{p}) II + a^{-q} C(\frac{q}{p}) I. \end{aligned}$$

Así, $[1 - a^{-q}C(\frac{q}{p})]I \leq C(\frac{q}{p})II$ siempre que $1 - a^{-q}C(\frac{q}{p}) > 0$. Por eso debemos elegir a de manera que si $q \leq p, 1 - a^{-q} > 0$, lo cual es cierto para todo $a > 1$, y si $q > p,\ 1 - a^{-q}2^{\frac{q}{p}-1} > 0 \iff a^q > 2^{\frac{q}{p}-1} \iff a > 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. $\square$

Para $1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty$ el siguiente resultado de P. Soardi ([69]) prueba que los sistemas de ondículas con regularidad $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$ $\{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \ldots, L\}$ constituyen bases incondicionales para los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, y que la norma en estos espacios se puede caracterizar por coeficientes de ondículas.

Proposición 4.7.8. *([69], Proposición 1) Sea* $1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty$ *y* $\{\psi^l : l = 1, 2, \ldots, L\}$ *un sistema de ondículas con regularidad* $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$*. Entonces, cualquier función* $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ *se puede escribir de la forma*

$$f = \sum_{l=1}^{L} \sum_{Q\in\mathcal{D}} \langle f, \psi_Q^l \rangle \psi_Q^l \tag{4.120}$$

con la convergencia incondicional en $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ *y además,*

$$\|f\|_{p,q} \approx \|S_\psi(f)\|_{p,q}, \tag{4.121}$$

donde

$$S_\psi(f)(x) = \Big(\sum_{l=1}^{L} \sum_{Q\in\mathcal{D}} |\langle f, \psi_Q \rangle|^2 \chi_Q(x) |Q|^{-1} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.122}$$

Este resultado es válido para la ondícula de Haar.

La idea de la demostración es la siguiente. Dado $1 < p < \infty$ elegir $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$ y θ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. De la caracterización de la norma en los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ (1.62) tenemos

$$S_\psi(f), S_\psi^{-1}(f) : L^{p_j} \longrightarrow L^{p_j},\ j = 0, 1.$$

Aplicando el Teorema de Marcinkiewicz ([3], Teorema 4.3), tenemos

$$S_\psi(f),\ S_\psi^{-1}(f) : L^{p,q} \longrightarrow L^{p,q}.$$

Nota 4.7.9. *Para simplificar las demostraciones en el sistema de ondículas* $\{\psi^l : l = 1, 2, \ldots, L\}$ *consideraremos el caso* $L = 1$. *Nuestros Teoremas siguirán siendo válidos para cualquier* $L > 1$, *ya que la suma finita que aparece en la definición de la función quadrática* $S_\psi(f)$ *(4.122) solo cambia las estimaciones con constantes finitas.*

4.7.2. Funciones de democracia

En esta sección se calcula (salvo constantes multiplicativas) las funciones de democracia por la derecha y por la izquierda de bases de ondículas de regularidad $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$ en los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ en términos de los exponentes p y q.

La equivalencia (4.121) permite estudiar las funciones de democracia de los espacios de Lorentz estudiando las funciones de democracia de sus correspondientes espacios de sucesiones.

Dados $0 < p < \infty$ y $0 < q < \infty$ sea $\mathfrak{s}L^{p,q}$ el espacio de todas las sucesiones $\mathbf{s} = \{s_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ tales que

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} = \Big\| \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |s_Q|^2 \chi_Q(\cdot)|Q|^{-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)} < \infty \tag{4.123}$$

El espacio $\mathfrak{s}L^{p,q}$ es un espacio cuasi-normado. Por la proposición 4.7.8 cuando $1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty$ y $\{\psi_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ es una base de ondículas perteneciente a la clase de regularidad $\mathcal{R}^{0,M},\ M > d$,

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)} \approx \|\{\langle f, \psi_Q\rangle : Q \in \mathcal{D}\}\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}$$

y los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathfrak{s}L^{p,q}$ son isomorfos mediante la aplicación $f \longmapsto \{\langle f, \psi_Q\rangle\}_{Q\in\mathcal{D}}$. Con esta aplicación el elemento $\psi_{Q'} \in L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ se transforma en

$$\mathbf{e}_{Q'} = \begin{cases} 1, & \text{si } Q' = Q, \\ 0, & \text{si } Q' \neq Q. \end{cases}$$

Llamaremos $\mathcal{B}_c$ a la base $\{\mathbf{e}_Q\}_{Q\in\mathcal{D}}$ en $\mathfrak{s}L^{p,q}$.

Proposición 4.7.10. *Para* $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$ *se tiene*

$$\min\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\} \lesssim \Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}, \quad \forall\ \Gamma \subset \mathcal{D} \text{ con } |\Gamma| = N.$$

Por lo tanto,

$$\min\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\} \lesssim h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \ .$$

Demostración. Para un elemento de la base $\mathcal{B}_c$, por (4.123) y (4.119) tenemos

$$\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} = |Q|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{\frac{1}{p}}. \tag{4.124}$$

Sea Γ un subconjunto de $\mathcal{D}$ de cardinal N. Usando la inclusión $\ell^2(\Gamma) \hookrightarrow \ell^\infty(\Gamma)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{Q\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} &= \Big\|\sum_{Q\in\Gamma}|Q|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\mathbf{e}_Q\Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \\ &= \Big\|\Big(\sum_{Q\in\Gamma}|Q|^{1-\frac{2}{p}}\chi_Q(\cdot)|Q|^{-1}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{p,q} \\ &\gtrsim \|\sup_{Q\in\Gamma}|Q|^{-\frac{1}{p}}\chi_Q(\cdot)\|_{p,q}\ . \end{aligned}\tag{4.125}$$

Sea $F(x) = \sup_{Q\in\Gamma}|Q|^{-\frac{1}{p}}\chi_Q(x)$. Usando la parte (i) de la Proposición 4.7.7 con $a = 2^{\frac{d}{p}}$, tenemos

$$\|F\|_{p,q}^q \approx \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{jqd}{p}}|\{x : F(x) \geq 2^{\frac{jd}{p}}\}|^{\frac{q}{p}}. \tag{4.126}$$

Tomamos $\Gamma = \bigcup_{j=1}^J \Gamma_j$ donde $\Gamma_j = \{Q \in \Gamma : |Q| = 2^{-dk_j}\}$ con $k_1 > k_2 > \ldots > k_J$. Tenemos $\sum_{j=1}^J |\Gamma_j| = |\Gamma| = N$. Puesto que el conjunto $\{x : F(x) \geq 2^{\frac{k_jd}{p}}\}$ contiene la unión disjunta $\bigcup_{Q\in\Gamma_j} Q$, entonces de (4.126) y del Lema 4.3.6 deducimos

$$\begin{aligned}\|F\|_{p,q}^q &\gtrsim \sum_{j=1}^J 2^{\frac{k_jqd}{p}}\Big|\bigcup_{Q\in\Gamma_j}Q\Big|^{\frac{q}{p}} = \sum_{j=1}^J 2^{\frac{k_jqd}{p}}\Big(\sum_{Q\in\Gamma_j}|Q|\Big)^{\frac{q}{p}} \\ &= \sum_{j=1}^J |\Gamma_j|^{\frac{q}{p}} \gtrsim \text{mín}\{N, N^{\frac{q}{p}}\}. \end{aligned}\tag{4.127}$$

Entonces,

$$\Big\|\sum_{Q\in\Gamma}\frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}}\Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \gtrsim \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\} = N^{\frac{1}{\text{máx}(p,q)}}, \tag{4.128}$$

lo que prueba el resultado.

□

En la demostración de la siguiente Proposición necesitamos usar el caso $0 < p < \infty$, $r = 2$ y $w = 1$ del Lema 4.4.7, es decir, si $\Gamma \subset \mathcal{D}$

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma}|Q|^{-\frac{2}{p}}\chi_Q(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \approx |Q_x|^{-\frac{1}{p}}\chi_{Q_x}(x) \tag{4.129}$$

donde Q_x denota el cubo más pequeño en Γ que contiene a $x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q$.

Para la demostración de la siguiente Proposición necesitamos de los conceptos de luz y sombra de un cubo en una colleción de cubos diádicos Γ introducidos en [29] (ver subsección 4.5.2).

Sea $\Gamma_{\text{mín}} = \{Q \in \Gamma : Q = Q_x \text{ para algún } x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q\}$ el conjunto de los cubos **minimales** en Γ, es decir

$$\Gamma_{\text{mín}} = \Big\{Q_x : x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q\Big\}.$$

Por (4.129) se tiene (ver (4.93) con $w = 1$)

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma} |Q|^{-\frac{2}{p}} \chi_Q(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \approx \Big(\sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} |Q|^{-\frac{2}{p}} \chi_Q(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto, solo los cubos de $\Gamma_{\text{mín}}$ serán relevantes para nuestros propósitos.

Usando los conceptos de sombra y luz dados en la subsección 4.5.2 recordamos que

$$\bigcup_{Q\in\Gamma} Q = \bigcup_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} Light(Q),$$

donde los conjuntos en la última unión de la igualdad anterior son disjuntos dos a dos. Por eso, debido a (4.129) tenemos (ver 4.94)

$$\Big(\sum_{Q\in\Gamma} |Q|^{-\frac{2}{p}} \chi_Q(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \approx \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} |Q|^{-\frac{1}{p}} \chi_{Light(Q)}(x), \tag{4.130}$$

donde la suma en el miembro derecho contiene como máximo un término distinto de cero para cada $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposición 4.7.11. *Para* $0 < p < \infty$ *y* $0 < q < \infty$, *tenemos*

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \lesssim \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}, \quad \forall\ \Gamma \subset \mathcal{D} \text{ con } |\Gamma| = N.$$

En particular $h_r(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \lesssim \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}$.

Demostración. De (4.130) deducimos,

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \approx \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} |Q|^{-\frac{1}{p}} \chi_{Light}(Q) \Big\|_{L^{p,q}}. \tag{4.131}$$

Tomamos $\Gamma_{\text{mín}} = \bigcup_{j=1}^{J} \Gamma_j$ donde $\Gamma_j = \{Q \in \Gamma_{\text{mín}} : |Q| = 2^{-k_j d}\}$, con $k_1 > k_2 > \ldots > k_J$. Entonces tenemos $\sum_{j=1}^{J} |\Gamma_j| = |\Gamma_{\text{mín}}|$. De la Proposición 4.7.7 parte ii) con $a = 2^{\frac{d}{p}}$ y el Lema 4.3.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \approx \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} |Q|^{-\frac{1}{p}} \chi_{Light}(Q) \Big\|_{L^{p,q}} \\
&\approx \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{kqd}{p}} |\{x : 2^{\frac{kd}{p}} \le \sum_{Q\in\Gamma_{\text{mín}}} |Q|^{-\frac{1}{p}} \chi_{Light(Q)}(x) < 2^{\frac{(k+1)}{p}}\}|^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{J} 2^{\frac{k_j qd}{p}} \Big| \bigcup_{Q\in\Gamma_j} Light(Q) \Big|^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\sum_{j=1}^{J} 2^{\frac{k_j qd}{p}} \Big(\sum_{Q\in\Gamma_j} 2^{-k_j d} \Big)^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{J} |\Gamma_j|^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} \le \text{máx}\{|\Gamma_{\text{mín}}|^{\frac{1}{q}}, |\Gamma_{\text{mín}}|^{\frac{1}{p}}\} \\
&\le \text{máx}\{|\Gamma|^{\frac{1}{q}}, |\Gamma|^{\frac{1}{p}}\} = \text{máx}\{N^{\frac{1}{q}}, N^{\frac{1}{p}}\} = N^{\frac{1}{\text{mín}(p,q)}}.
\end{aligned} \tag{4.132}$$

Esto concluye la demostración de la Proposición.

□

El resultado siguiente muestra que las acotaciones dadas en las Proposiciones 4.7.10 y 4.7.11 son óptimas (salvo constantes).

Lema 4.7.12. *Sean $0 < p < \infty$ y $0 < q < \infty$.*

i) Sea Γ_1 una colección de N cubos diádicos disjuntos de igual tamaño. Se tiene

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma_1} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \approx N^{\frac{1}{p}}.$$

ii) Sea $\Gamma_2 = \{Q_1, \ldots, Q_N\}$ una colección de N cubos diádicos disjuntos de tamaño $|Q_j| = 2^{-jd}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Entonces

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma_2} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} \approx N^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. i) Si $\Gamma_1 = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_N\} \subset \mathcal{D}$ es un conjunto de N cubos diádicos disjuntos con la misma medida fija $|Q|$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{Q\in\Gamma_1} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} &= \Big\| \Big(\sum_{Q\in\Gamma_1} |Q|^{-\frac{2}{p}} \chi_Q \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{p,q} = |Q|^{-\frac{1}{p}} \Big\| \chi_{\bigcup_{Q\in\Gamma_1} Q} \Big\|_{p,q} \\
&= |Q|^{-\frac{1}{p}} \Big| \bigcup_{Q\in\Gamma_1} Q \Big|^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.133}$$

ii) Si $\Gamma_2 = \{Q_1, Q_2 \dots, Q_N\} \subset \mathcal{D}$ es un conjunto de N cubos diádicos disjuntos de tamaño $|Q_j| = 2^{-jd},\ j = 1, 2, \dots, N$, tenemos

$$\Big\| \sum_{Q\in\Gamma_2} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{p,q}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} = \Big\| \sum_{j=1}^{N} |Q_j|^{-\frac{1}{p}} \chi_{Q_j} \Big\|_{p,q} = \Big\| \sum_{j=1}^{N} 2^{\frac{jd}{p}} \chi_{Q_j} \Big\|_{p,q}. \tag{4.134}$$

Usando la caracterización discreta de los espacios $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ dada en la Proposición 4.7.7 ii), con $a = 2^{\frac{d}{p}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_2} \frac{\mathbf{e}_Q}{\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}}} \Big\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{kqd}{p}} |\{x : 2^{\frac{kd}{p}} \le \sum_{j=1}^{N} 2^{\frac{jd}{p}} \chi_Q(x) < 2^{\frac{(k+1)d}{p}}\}|^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{N} 2^{\frac{jqd}{p}} |Q_j|^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} = N^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.135}$$

□

Combinando las Proposiciones 4.7.10, 4.7.11 y el Lema 4.7.12 se obtiene:

Teorema 4.7.13. *Para* $0 < p < \infty$ *y* $0 < q < \infty$, *tenemos*

$$h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \approx \min\{N^{\frac{1}{q}}, N^{\frac{1}{p}}\} \quad y \quad h_r(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \approx \max\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}$$

Con el isomorfismo mencionado al comienzo de esta sección entre $\mathfrak{s}L^{p,q}$ y $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, el esquema de la transferencia abstracta diseñada en la sección 6.2 de [27] nos permite enunciar el teorema anterior de la siguiente forma, teniendo en cuenta la Proposición 4.7.8:

Teorema 4.7.14. *Para* $1 < p < \infty$ *y* $1 \le q < \infty$, *sea* $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \dots, L\}$ *una base de ondículas perteneciente a la clase de regularidad* $\mathcal{R}^{0,M}$ *con* $M > d$. *Entonces*

$$h_l(N; \mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{\max(p,q)}} \quad y \quad h_r(N; \mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{\min(p,q)}}.$$

4.7.3. Aplicaciones

Usando el Teorema 4.7.13 y aplicando el Teorema 3.6.1 se obtienen las siguientes inclusiones para las clases avariciosas y los espacios de aproximación de espacios $\mathfrak{s}L^{p,q}$.

Corolario 4.7.15. *Sean* $0 < p, q < \infty$. *Para todo* $\alpha > 0$ *y* $0 < r \le \infty$

$$\ell^{\tau^-,r}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathscr{G}_r^{\alpha}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathcal{A}_r^{\alpha}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \ell^{\tau^+,r}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q})$$

donde $\frac{1}{\tau^-} = \alpha + \frac{1}{\min(p,q)}$ *y* $\frac{1}{\tau^+} = \alpha + \frac{1}{\max(p,q)}$.

Nota 4.7.16. *De los Corolarios 3.4.9 y 3.5.4 se deduce que las inclusiones en el Corolario anterior son las mejores posibles en la escala de los espacios de Lorentz discretos $\ell^{\tau,r}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q})$ (observar que en este caso, ambas funciones h_r y h_l son funciones de $\mathbb{W}_+$).*

Para valores particulares de los parámetros, los espacios de Lorentz discretos que aparecen en el Corolario anterior pueden identificarse con espacios de sucesiones de Besov, como se muestra en el siguiente Lema.

Lema 4.7.17. *Sean $0 < p, q < \infty$ y $\alpha > 0$. Sea τ definido por $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$. Se tiene*

$$\ell^{\tau,\tau}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) = \mathfrak{s}\dot{B}^{\alpha}_{\tau,\tau}.$$

Demostración. El resultado se sigue de la siguiente cadena de igualdades en donde hemos usado $\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}L^{p,q}} = |Q|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{\frac{1}{p}}$ (ver (4.124)):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s}\|_{\ell^{\tau,\tau}(\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}L^{p,q})} &= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} \|s_Q\mathbf{e}_Q\|^{\tau}_{\mathfrak{s}L^{p,q}}\Big)^{\frac{1}{\tau}} = \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |s_Q|^{\tau}\|\mathbf{e}_Q\|^{\tau}_{\mathfrak{s}L^{p,q}}\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\
&= \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{\frac{1}{p}})^{\tau}\Big)^{\frac{1}{\tau}} = \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|s_Q||Q|^{-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau}})^{\tau}\Big)^{\frac{1}{\tau}} \\
&= \|\mathbf{s}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\alpha}_{\tau,\tau}}.
\end{aligned}$$

□

Tomar $\tau_0 < \tau^-$ en el Corolario 4.7.15. Como $\ell^{\tau_0,r_0} \hookrightarrow \ell^{\tau^-,r}$ para todo $0 < r_0, r \leq \infty$ se deducen las inclusiones

$$\ell^{\tau_0,r_0}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathscr{G}^{\alpha}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}). \tag{4.136}$$

De manera similar, si $\tau_1 > \tau^+$ y $0 < r, r_1 \leq \infty$ se tiene

$$\mathscr{G}^{\alpha}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\alpha}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \ell^{\tau_1,r_1}(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}). \tag{4.137}$$

Combinando estos resultados con el Lema 4.7.17 se obtienen inclusiones entre las clases avariciosas y los espacios de aproximación y los espacios de Besov de sucesiones.

Corolario 4.7.18. *Sean $0 < p, q < \infty$, $0 < r \leq \infty$ y $\alpha > 0$. Para $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_0 < \infty$, $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\alpha_0}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ y $\frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$ se tiene*

$$\mathfrak{s}\dot{B}^{\alpha_0}_{\tau_0,\tau_0} \hookrightarrow \mathscr{G}^{\frac{\alpha}{d}}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{d}}_r(\mathcal{B}_c, \mathfrak{s}L^{p,q}) \hookrightarrow \mathfrak{s}\dot{B}^{\alpha_1}_{\tau_1,\tau_1}.$$

Demostración. Como $\frac{1}{\tau_0} > \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ y $\frac{1}{\tau_1} < \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$, basta tomar $r_0 = \tau_0$ y $r_1 = \tau_1$ en (4.136) y (4.137) y aplicar el Lema 4.7.17. □

El algoritmo abstracto de transferencia diseñado en la sección 6.2 de [27] permite traducir el Corolario 4.7.18 en términos de espacios de Besov $\dot{B}^{\alpha}_{\tau,\tau}$ cuando exista una caracterización de estos espacios con bases de ondículas (ver (4.3)).

Corolario 4.7.19. *Sean* $1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty\ 0 < r \leq \infty$. *Para* $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_0 < \infty$ *tal que* $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\alpha_0}{d} + \frac{1}{\text{mín}(p,q)}$ *y* $\frac{1}{\tau_1} = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{1}{\text{máx}(p,q)}$ *se tiene,*

$$\dot{B}^{\alpha_0}_{\tau_0,\tau_0} \hookrightarrow \mathscr{G}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow \mathcal{A}_r^{\frac{\alpha}{d}}(\mathcal{W}, L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow \dot{B}^{\alpha_1}_{\tau_1,\tau_1}$$

para cualquier base de ondículas $\mathcal{W}$ *de la clase* $\mathcal{R}^{r,M}$ *(ver Definición 4.1.2) con* $r > \alpha_0$ *y* $M > d + \alpha_0$.

4.8. Espacios $\Lambda^q(w)$

4.8.1. Definiciones y resultados preliminares

Sea w una función definida en $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ positiva en casi todo punto y localmente integrable en $\mathbb{R}^+$. Supondremos que $\int_0^\infty w(x)dx = \infty$ y diremos que w es un peso en $(0, \infty)$. Para $0 < q < \infty$ definimos el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda^q(w)} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ como

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} = \Big(\int_0^\infty (f^*(t))^q w(t)dt\Big)^{\frac{1}{q}},\ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \tag{4.138}$$

donde f^* es el reordenamiento no creciente de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ con la medida de Lebesgue (ver Definición 4.7.2). El espacio de Lorentz $\Lambda^q(w)$ es la clase

$$\Lambda^q(w) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\Lambda^q(w)} < \infty\}. \tag{4.139}$$

Asociado con w definimos

$$W(r) = \int_0^r w(s)ds < \infty,\ 0 < r < \infty. \tag{4.140}$$

Ejemplo 4.8.1. *Cuando* $w(t) = \left(\frac{q}{p}\right) t^{\frac{q}{p}-1}$, *con* $0 < p, q < \infty$, *se tiene* $\Lambda^q(w) = L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ *y* $W(r) = r^{\frac{q}{p}},\ r > 0$.

Ejemplo 4.8.2. *Cuando* $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1} \log(e + t)^{\beta q},\ 0 < p, q < \infty,\ \beta \in \mathbb{R}$, *se tiene que* $\Lambda^q(w)$ *es el espacio de Lorentz-Zygmund* $L^{p,q}(\log L)^\beta$ *(ver [54]).*

Proposición 4.8.3. *(ver [10], Proposición 2.2.5) Si* $0 < q < \infty$ *y* f *medible en* $\mathbb{R}^d$

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} = \Big(\int_0^\infty q t^{q-1} W(\lambda_f(t))dt\Big)^{\frac{1}{q}},$$

donde $\lambda_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > t\}|$ *es la función de distribución de* f *(ver Definición 4.7.1).*

Lema 4.8.4. *(ver [10], Lema 2.2.10) Si* $0 < q < \infty$*, los espacios* $\Lambda^q(w)$ *son cuasi-normados si y sólo si existe* $C > 0$ *tal que*

$$0 < W(|A \cup B|) \leq C[W(|A|) + W(|B|)] \tag{4.141}$$

para cada par de conjuntos medibles $A, B \subset \mathbb{R}^d$*,* $|A \cup B| > 0$.

Escribimos $W \in \Delta_2$ si W satisface (4.141), de manera que el Lema 4.8.4 prueba que $\Lambda^q(w)$ es cuasi-normado si y sólo si $W \in \Delta_2$.

Proposición 4.8.5. *(ver [10], lema 2.2.12) Las siguientes condiciones son equivalentes*

$$i)\ W \in \Delta_2 \quad ii) W(2t) \leq CW(t),\ t > 0 \quad iii) W(t+s) \leq C[W(s) + W(t)],\ t, s > 0.$$

La constante más pequeña que puede ponerse en iii) de la Proposición 4.8.5 se escribirá como D_W e.d.

$$D_W = \sup_{s,t>0} \frac{W(s+t)}{W(s) + W(t)}. \tag{4.142}$$

Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Por la Proposición 4.8.3 se tiene

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_{\Lambda^q(w)} &= \Big(\int_0^\infty qt^{q-1} W(\lambda_{\chi_E}(t))dt\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_0^1 qt^{q-1} W(|E|)dt\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= W(|E|)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.143}$$

En particular, $\Lambda^q(w)$ es un espacio invariante por reordenamiento con la función fundamental $W(t)^{\frac{1}{q}}$.

Para obtener las funciones de democracia de bases de ondículas en los espacios $\Lambda^q(w)$ necesitamos usar las funciones de dilatación de W. En general, si $\Psi(t)$ es una función finita en casi todo punto definida en $(0, \infty)$ las funciones de dilatación de Ψ son

$$h_\Psi^+(t) = \sup_{0<s<\infty} \frac{\Psi(st)}{\Psi(s)},\ 0 < t < \infty \tag{4.144}$$

y

$$h_\Psi^-(t) = \inf_{0<s<\infty} \frac{\Psi(st)}{\Psi(s)},\ 0 < t < \infty. \tag{4.145}$$

Observe que

$$h_\Psi^-(t) = \inf_{0<\tau<\infty} \frac{\Psi(\tau)}{\Psi(\tau/t)} = \Big[\sup_{0<\tau<\infty} \frac{\Psi(t^{-1}\tau)}{\Psi(\tau)}\Big]^{-1} = [h_\Psi^+(1/t)]^{-1}. \tag{4.146}$$

Se tiene que

$$h^+_\Psi(t_1t_2) = \sup_{0<s<\infty} \frac{\Psi(st_1t_2)}{\Psi(s)} \leq \sup_{0<s<\infty} \frac{\Psi(t_1t_2s)}{\Psi(t_2s)} \sup_{0<s<\infty} \frac{\Psi(t_2s)}{\Psi(s)} \leq h^+_\Psi(t_1)h^+_\Psi(t_2)$$

que es la relación de submultiplicatividad. Si $h^+_\Psi(t)$ es finita en casi todo punto los números

$$i_\Psi = \lim_{t\to 0} \frac{\log h^+_\Psi(t)}{\log t} = \sup_{0<t<1} \frac{\log h^+_\Psi(t)}{\log t} \tag{4.147}$$

y

$$I_\Psi = \lim_{t\to \infty} \frac{\log h^+_\Psi(t)}{\log t} = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h^+_\Psi(t)}{\log t}, \tag{4.148}$$

que se llaman **exponentes de dilatación inferior** y **superior** respectivamente, satisfacen

$$-\infty < i_\Psi \leq I_\Psi < \infty. \tag{4.149}$$

Del teorema 1.3 de S.G. Kreĭn Ju. I.Petunin y E.M. Semenov ([44], pg. 53) se deduce que

$$h^+_\Psi(t) \geq t^{I_\Psi} \textit{ para } t > 1 \quad y \quad h^+_\Psi(t) \geq t^{i_\Psi} \text{ para } t < 1 \tag{4.150}$$

y para todo $\epsilon > 0$ se tiene

$$h^+_\Psi(t) \leq t^{I_\Psi+\epsilon} \quad \text{para } t \text{ grande} \tag{4.151}$$

y

$$h^+_\Psi(t) \leq t^{i_\Psi-\epsilon} \quad \text{para } t \text{ pequeño (cercano a cero).} \tag{4.152}$$

De hecho, (4.149), (4.150) y (4.151) se deducen de (4.147) y (4.148).

Si Ψ es creciente, $h^+_\Psi(t) \leq 1$ si $t < 1$ y de (4.144) se deduce que

$$0 \leq i_\Psi \leq I_\Psi < \infty. \tag{4.153}$$

Para las funciones $W(t) = \int_0^t w(s)ds < \infty,\ 0 < t < \infty$, definidas en (4.140) usaremos el siguiente resultado

Lema 4.8.6. *(ver lema 1.4 en [44], pg. 56) Si* $\Psi(t)$ *es positiva en* $(0,\infty)$ *tal que* $h^+_\Psi(t_0) < 1$ *para algún* $t_0 < 1$ *y* $h^+_\Psi(t)$ *acotada en* $[1,a]$ *para algún* $a > 1$. *Entonces,*

$$\int_0^t \frac{\Psi(s)}{s} dt \approx \Psi(t).$$

Calculamos a continuación las funciones $W(t) = \int_0^t w(s)ds$ y sus funciones de dilatación para las funciones $w(s)$ dadas en los ejemplos 4.8.1 y 4.8.2 de esta sección.

Ejemplo 4.8.7. *Cuando* $w(t) = t^{\alpha-1}$ *con* $\alpha > 0$, $W(t) = \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$, $t > 0$ *y* $h_W^+(t) = t^{\alpha} = h_W^-(t)$ *por lo que* $i_W = I_W = \alpha$.

Para los espacios de Lorentz-Zygmund del ejemplo 4.8.2 comenzamos con el siguiente resultado

Proposición 4.8.8. *a) Si* $\Psi(t) = t^{\alpha}(\log(e+t))^{\gamma}$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ *tenemos*

$$h_\Psi^+(t) \approx \begin{cases} t^{\alpha}, & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ t^{\alpha}(\log(e+t))^{\gamma}, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

y

$$h_\Psi^-(t) \approx \begin{cases} t^{\alpha}/(\log(e+\frac{1}{t}))^{\gamma}, & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ t^{\alpha}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

b) Si $\Psi(t) = t^{\alpha}(\log(e+t))^{\gamma}$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$ *tenemos*

$$h_\Psi^+(t) \approx \begin{cases} t^{\alpha}/(\log(e+\frac{1}{t}))^{\gamma}, & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ t^{\alpha}, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

y

$$h_\Psi^-(t) \approx \begin{cases} t^{\alpha}, & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ t^{\alpha}(\log(e+t))^{\gamma}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

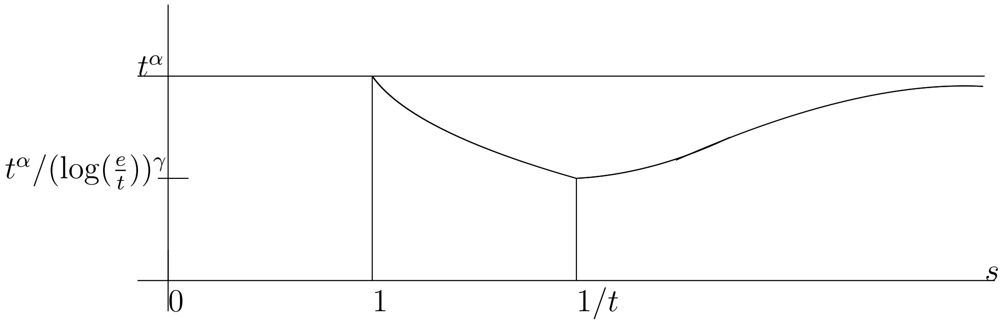
Demostración. a) En la demostración usaremos la equivalencia

$$\log(e+t) \approx 1 + \log^+ t, \ t > 0. \tag{4.154}$$

De (4.154), $\Psi(t) \approx t^{\alpha}(1 + \log^+ t)^{\gamma}$. Entonces, si $0 < t \leq 1$

$$\frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} \approx \begin{cases} t^{\alpha}, & \text{si } 0 < s \leq 1, \\ t^{\alpha}/(\log(es))^{\gamma}, & \text{si } 1 < s \leq \frac{1}{t}, \\ t^{\alpha}\left(\frac{\log(est)}{\log(es)}\right)^{\gamma}, & \text{si } \frac{1}{t} < s < \infty, \end{cases}$$

cuya gráfica es

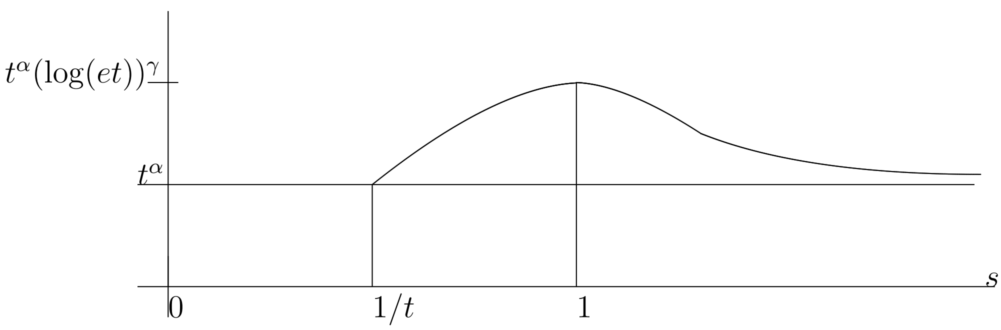


De esta gráfica se deduce que $h_\Psi^+(t) \approx t^\alpha$ si $0 < t \leq 1$.

Si $1 < t < \infty$

$$\frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} \approx \begin{cases} t^\alpha, & \text{si } 0 < s \leq \frac{1}{t}, \\ t^\alpha(\log(est))^\gamma, & \text{si } \frac{1}{t} < s \leq 1, \\ t^\alpha\left(\frac{\log(est)}{\log(es)}\right)^\gamma, & \text{si } s > 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es



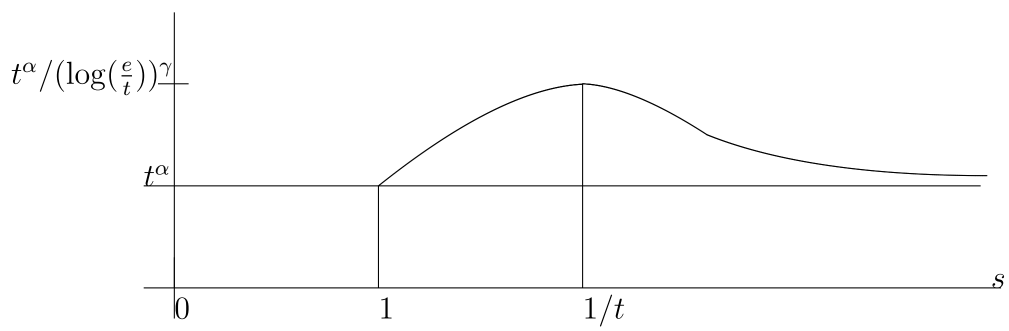
De esta figura se deduce que $h_\Psi^+(t) \approx t^\alpha(\log(e+t))^\gamma$ si $t > 1$. El resultado para $h_\Psi^-(t)$

se deduce también de las dos gráficas anteriores o de la ecuación (4.146).

b) Por (4.154), $\Psi(t) \approx t^\alpha(1+\log^+ t)^\gamma$. Entonces, si $0 < t \le 1$

$$\frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} \approx \begin{cases} t^\alpha, & \text{si } 0 < s \le 1, \\ t^\alpha/(\log(es))^\gamma, & \text{si } 1 < s \le \frac{1}{t}, \\ t^\alpha\left(\frac{\log(est)}{\log(es)}\right)^\gamma, & \text{si } s > \frac{1}{t}, \end{cases}$$

cuya gráfica es (recordar que $\gamma < 0$)



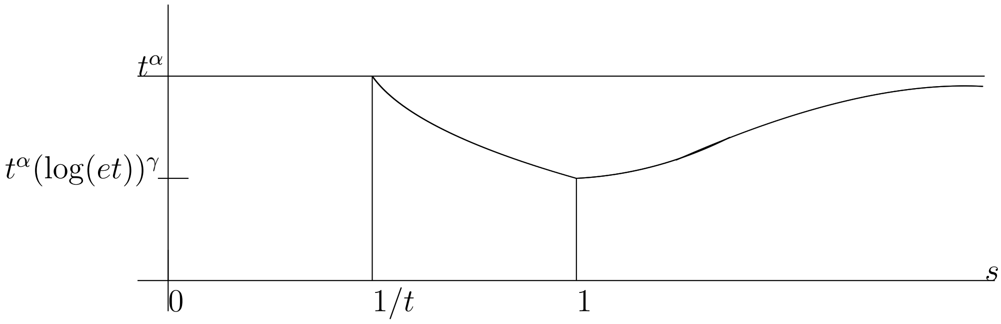
De esta figura se deduce que

$$h_\Psi^+(t) \approx t^\alpha/(\log(e/t))^\gamma = t^\alpha/(1+\log^+ 1/t)^\gamma \approx t^\alpha/(\log(e+\frac{1}{t}))^\gamma \text{ si } 0 < t \le 1.$$

Si $1 < t < \infty$

$$\frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} \approx \begin{cases} t^\alpha, & \text{si } 0 < s \le \frac{1}{t}, \\ t^\alpha(\log(est))^\gamma, & \text{si } \frac{1}{t} < t \le 1, \\ t^\alpha\left(\frac{\log(est)}{\log(es)}\right)^\gamma, & \text{si } s > 1, \end{cases}$$

cuya gráfica es



De esta figura se deduce que $h_\Psi^+(t) \approx t^\alpha$ si $t > 1$. El resultado para $h_\Psi^-(t)$ se deduce también de las dos gráficas anteriores o de la ecuación (4.154).

□

Ejemplo 4.8.9. *Si* $w(t) = t^{\alpha-1}(\log(e+t))^\gamma$ *con* $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, *tomar* $\Psi(t) = tw(t)$ *con lo que* $W(t) = \int_0^t w(s)ds = \int_0^t \frac{\Psi(s)}{s}ds$. *Como* h_Ψ^+ *satisface las hipótesis del Lema 4.8.6 con* $t_0 = 2$ *y* $a = 2$ *(por ejemplo) se deduce que*

$$W(t) \approx \Psi(t) = t^\alpha(\log(e+t))^\gamma$$

y la Proposición 4.8.8 (parte a)) nos da las funciones de dilatación h_W^+ *y* h_W^- *de* W *que son las mismas, salvo equivalencias, que las de* Ψ. *Por tanto,*

$$i_W = \alpha = I_W.$$

Ejemplo 4.8.10. *Si* $w(t) = t^{\alpha-1}(\log(e+t))^\gamma$ *con* $\alpha > 0$, $\gamma < 0$, *proceder como en el ejemplo 4.8.9 para deducir que*

$$W(t) \approx \Psi(t) = t^\alpha(\log(e+t))^\gamma$$

y, por tanto, la parte b) de la Proposición 4.8.8 nos da las funciones de dilatación h_W^+ *y* h_W^-. *De aquí se deduce*

$$i_W = \alpha = I_W.$$

Necesitamos, al igual que en la Proposición 4.7.7 para los espacios de Lorentz, expresiones discretas equivalentes para la cuasi-norma en $\Lambda^q(w)$. Recordar que siempre asumimos que $W \in \Delta_2$.

Sea $\mathbf{A}$ la colección de todas las sucesiones de números reales positivos $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ tal que

$$i)\ \lim_{k\to\infty} a_k = \infty \qquad ii)\ \lim_{k\to-\infty} a_k = 0$$

$$iii)\ m = \inf_k \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad y \quad M = \sup_k \frac{a_{k+1}}{a_k} < \infty$$

Proposición 4.8.11. *Sean* $0 < q < \infty$, *w un peso en* $(0,\infty)$ *y* $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathbf{A}$. *Se tiene*

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} \approx \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q W(\lambda_f(a_k))\Big]^{\frac{1}{q}}$$

donde $\lambda_f(a_k) = |\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > a_k\}|$.

Demostración. Discretizando la integral de la Proposición 4.8.3 y usando que W es creciente se obtiene

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^q(w)}^q &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} qt^q W(\lambda_f(t))\frac{dt}{t} \le q\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{a_k}^{a_{k+1}} t^q \frac{dt}{t}\Big) W(\lambda_f(a_k)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_{k+1}^q - a_k^q) W(\lambda_f(a_k)) \le (M^q - 1)\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q W(\lambda_f(a_k)). \end{aligned}$$

La desigualdad contraria se prueba de manera similar:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^q(w)}^q &\ge q\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{a_k}^{a_{k+1}} t^q \frac{dt}{t}\Big) W(\lambda_f(a_{k+1})) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_{k+1}^q - a_k^q) W(\lambda_f(a_{k+1})) \\ &\ge (1 - \frac{1}{m^q}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+1}^q W(\lambda_f(a_{k+1})). \end{aligned}$$

□

Para $0 < q < \infty$ y $W \in \Delta_2$, sea $\mathbf{A}_{q,W}$ el conjunto de todas las sucesiones $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathbf{A}$ tales que $m^q > D_W$ donde m aparece en la definición de $\mathbf{A}$ y D_W es como en (4.142).

Proposición 4.8.12. *Sean* $0 < q < \infty$, *w un peso en* $(0,\infty)$ *y* $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathbf{A}_{q,W}$ *con* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$. *Si* $f \in \Lambda^q(w)$ *se tiene*

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} \approx \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q W(\lambda_f(a_k : a_{k+1}))\Big]^{\frac{1}{q}}$$

donde

$$\lambda_f(a_k : a_{k+1}) = |\{x \in \mathbb{R}^d : a_k < |f(x)| \le a_{k+1}\}|.$$

Demostración. Como $\lambda_f(a_k) = \lambda_f(a_k : a_{k+1}) + \lambda_f(a_{k+1})$ y $W \in \Delta_2$, de (4.142) deducimos

$$W(\lambda_f(a_k)) \leq D_W[W(\lambda_f(a_k : a_{k+1})) + W(\lambda_f(a_{k+1}))]. \tag{4.155}$$

Sean

$$I = \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q W(\lambda_f(a_k))\Big]^{\frac{1}{q}}$$

y

$$II = \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q W(\lambda_f(a_k : a_{k+1}))\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

Es claro que $II \leq I$. Por otro lado, usando (4.155) obtenemos

$$\begin{aligned} I^q \;\; &\leq \;\; D_W II^q + D_W \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q W(\lambda_f(a_{k+1})) \\ &= D_W II^q + D_W \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{a_k}{a_{k+1}}\Big)^q a_{k+1}^q W(\lambda_f(a_{k+1})) \\ &\leq D_W II^q + D_W \frac{1}{m^q} I^q. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{A}_{q,W}$ se tiene $D_W/m^q < 1$ y por lo tanto $(1 - D_W\frac{1}{m^q}) > 0$ y se deduce la desigualdad

$$\Big(1 - \frac{D_W}{m^q}\Big) I^q \leq D_W II^q.$$

Por tanto, $II \approx I$ y el resultado deseado se deduce de la Proposición 4.8.11. $\square$

A continuación mostraremos resultados sobre caracterización de espacios $\Lambda^q(w)$ usando bases de ondículas. Usaremos un resultado de P. Soardi ([69]) sobre bases de ondículas en espacios de Banach invariantes por reordenamiento. Los espacios $\Lambda^q(w)$ son, por definición, invariantes por reordenamiento y son cuasi-normados suponiendo $W \in \Delta_2$, pero no siempre son normables. Una condición necesaria y suficiente cuando $1 \leq q < \infty$ es que $w \in B_{q,\infty}$.

Definición 4.8.13. *(Ver Teorema 1.3.3 en [10]) Si $1 < q < \infty$ y w es un peso en $(0, \infty)$, escribimos $w \in B_{q,\infty}$ si*

$$\Big(\int_0^r \Big(\frac{W(t)}{t}\Big)^{1-q'} dt\Big)^{\frac{1}{q'}} W^{\frac{1}{q}}(r) \leq Cr, \;\; r > 0$$

donde $W(r) = \int_0^r w(s)ds$.

Definición 4.8.14. *(Ver teorema 1.3.3 en [10]) Si w es un peso en $(0, \infty)$, $w \in B_{1,\infty}$ si*

$$\frac{W(r)}{r} \leq C\frac{W(t)}{t}, \quad 0 < t < r.$$

Proposición 4.8.15. *(Ver teorema 2.5.2 en [10]) Si* $1 \leq q < \infty$ *y* $w \in B_{q,\infty}$*, el espacio* $\Lambda^q(w)$ *es normable.*

Para poder aplicar el resultado probado por P. Soardi en [69] es necesario tener los índices de Boyd de $\Lambda^q(w)$, $\alpha_{\Lambda^q(w)}$ y $\beta_{\Lambda^q(w)}$ que satisfagan

$$0 < \alpha_{\Lambda^q(w)} \leq \beta_{\Lambda^q(w)} < 1. \tag{4.156}$$

Los índices de Boyd de un espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$ formado por funciones definidas en $\mathbb{R}^d$ y que sea invariante por reordenamiento se definen a través del **operador de dilatación** $\sigma_\tau,\ \tau > 0$, dado por

$$(\sigma_\tau f)^*(s) = f^*(s/\tau),\ 0 < s < \infty$$

donde f es una función medible definida en $\mathbb{R}^d$. Si $h_{\mathbb{X}}(\tau) := \|\sigma_\tau\|$ denota la norma del operador σ_τ en un espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$ se definen los índices de Boyd mediante:

$$\alpha_{\mathbb{X}} = \sup_{0<\tau<1} \frac{\log h_{\mathbb{X}}(\tau)}{\log \tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\log h_{\mathbb{X}}(\tau)}{\log \tau}$$

y

$$\beta_{\mathbb{X}} = \inf_{1<\tau<\infty} \frac{\log h_{\mathbb{X}}(\tau)}{\log \tau} = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{\log h_{\mathbb{X}}(\tau)}{\log \tau}.$$

Para $\mathbb{X} = \Lambda^q(w),\ 0 < q < \infty$, los índices de Boyd de $\mathbb{X}$ pueden calcularse con los exponentes de dilatación de W. Esto se deducirá como corolario del siguiente resultado.

Proposición 4.8.16. *Para todo peso* $w \in \mathrm{W}$ *(ver 4.14) y todo* $0 < q < \infty$ *se tiene*

$$h_{\Lambda^q(w)}(\tau) = (h_W^+(\tau))^{\frac{1}{q}},\ \tau > 0.$$

Demostración. Tomamos $f = \chi_E$ donde $E \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de medida positiva s. Entonces tenemos,

$$\|\sigma_\tau \chi_E\|_{\Lambda^q(w)} \leq \|\sigma_\tau\| \|\chi_E\|_{\Lambda^q(w)} = \|\sigma_\tau\| W(s)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.157}$$

Ahora, puesto que $(\sigma_\tau(\chi_E)^*(s)) = (\chi_E)^*(\frac{s}{\tau}) = \chi^*_{\tau E}(s)$, tenemos

$$\|\sigma_\tau \chi_E\|_{\Lambda^q(w)} = \|\chi_{\tau E}\|_{\Lambda^q(w)} = W(\tau s)^{\frac{1}{q}}$$

y entonces la desigualdad (4.157) prueba que

$$\|\sigma_\tau\| \geq \frac{W(\tau s)^{\frac{1}{q}}}{W(s)^{\frac{1}{q}}},\ \forall\ s > 0.$$

Tomando el supremo sobre todo $s > 0$ en la desigualdad anterior obtenemos

$$(h_W^+(\tau))^{\frac{1}{q}} \leq \|\sigma_\tau\| = h_{\Lambda^q(w)},\ \tau > 0. \tag{4.158}$$

Para probar la desigualdad contraria, usamos las relaciones siguientes (ver [44], pg. 72):

Si $x(t), y(t) \geq 0$ son dos funciones reales tales que

$$\int_0^r x(t)dt \leq \int_0^r y(t)dt, \quad \forall\ r > 0, \tag{4.159}$$

entonces,

$$\int_0^\infty f(t)x(t)dt \leq \int_0^\infty f(t)x(t)dt, \tag{4.160}$$

para toda $f(t) \geq 0$ no creciente.

Ahora dada $f \in \Lambda^q(w)$ tenemos

$$\begin{aligned} \|\sigma_\tau f\|_{\Lambda^q(w)} &= \Big(\int_0^\infty ((\sigma_\tau f)^*(s))^q w(s)ds\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_0^\infty f^*(s/\tau)^q w(s)ds\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Big(\int_0^\infty f^*(u)^q w(\tau u)\tau du\Big)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.161}$$

Sean $x(u) = \tau w(\tau u)$ y $y(u) = h_W^+(\tau)w(u)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^r x(u)du &= \int_0^r \tau w(\tau u)du = \int_0^{\tau r} w(s)ds = W(\tau r) \leq h_W^+(\tau)W(r) \\ &= \int_0^r h_W^+(\tau)w(u)du = \int_0^r y(u)du. \end{aligned}$$

Entonces, usando (4.161) y la desigualdad (4.160), obtenemos

$$\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda^q(w)} \leq \Big(\int_0^\infty f^*(u)^q(h_W^+(\tau))w(u)du\Big)^{\frac{1}{q}} = (h_W^+(\tau))^{\frac{1}{q}}\|f\|_{\Lambda^q(w)}.$$

Esto prueba que

$$h_{\Lambda^q(w)} = \|\sigma_\tau\| \leq (h_W^+(\tau))^{\frac{1}{q}}. \tag{4.162}$$

Las desigualdades (4.158) y (4.162) prueban el resultado. $\square$

Corolario 4.8.17. *Para todo peso* $w \in \mathrm{W}$ *(ver 4.14) y todo* $0 < q < \infty$

$$\alpha_{\Lambda^q(w)} = \frac{1}{q} i_W \quad y \quad \beta_{\Lambda^q(w)} = \frac{1}{q} I_W$$

donde i_W *e* I_W *son los exponentes de dilatación de* $W(t) = \int_0^t w(s)ds$.

A la vista de este Corolario, podemos aplicar la Proposición 1 de [69] si $0 < i_W \leq I_W < q$. Además necesitamos suponer que $w \in B_{q,\infty}$, $1 \leq q < \infty$ (ver Definiciones 4.8.13 y 4.8.14) para que los espacios $\Lambda^q(w)$ sean de Banach. El siguiente resultado prueba que $i_W < q$ es suficiente para asegurar que $w \in B_{q,\infty}$.

Lema 4.8.18. *Si $w \in \mathrm{W}$ y $1 \leq q < \infty$ de manera que $I_W < q$ se tiene que $w \in B_{q,\infty}$.*

Demostración. Comencemos con el caso $1 < q < \infty$ y escribamos $\Psi(t) = W(t)^{1-q'}t^{q'}$ de manera que

$$\int_0^r \Big(\frac{W(s)}{s}\Big)^{1-q'} ds = \int_0^r \Psi(s)\frac{ds}{s}.$$

Tenemos que

$$h_\Psi^+(t) = \sup_{s>0} \frac{\Psi(st)}{\Psi(s)} = \sup_{s>0} t^{q'} \Big(\frac{W(st)}{W(s)}\Big)^{1-q'} = \sup_{s>0} t^{q'} \Big(\frac{W(s)}{W(st)}\Big)^{\frac{q'}{q}} = \Big[t h_W^+\Big(\frac{1}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big]^{q'}.$$

Tomar $\epsilon > 0$ tal que $I_W + \epsilon < q$. De (4.151) se deduce que existe $t_0 < 1$ tal que $h_W^+\Big(\frac{1}{t_0}\Big) \leq \Big(\frac{1}{t_0}\Big)^{I_W+\epsilon} < \Big(\frac{1}{t_0}\Big)^q$. Entonces, $h_\Psi^+(t_0) < 1$. Por otro lado, para cualquier $t > 1$, $h_W^+\Big(\frac{1}{t}\Big) \leq 1$, por lo que $h_\Psi^+(t) \leq t^{q'}$. Por tanto, $\Psi(t)$ satisface las hipótesis del lema 4.8.6 y concluimos que

$$\int_0^r \Big(\frac{W(s)}{s}\Big)^{1-q'} ds \approx W(r)^{1-q'} r^{q'}.$$

Por tanto,

$$\Big(\int_0^r \Big(\frac{W(s)}{s}\Big)^{1-q'} ds\Big)^{\frac{1}{q'}} (W(r))^{\frac{1}{q}} \lesssim W(r)^{-\frac{1}{q}} r W(r)^{\frac{1}{q}} = r,$$

lo que prueba que $w \in B_{q,\infty},\ 1 < q < \infty$.

Para $q = 1$ escribimos $\Psi(t) = \frac{t}{W(t)}$ de manera que

$$\int_0^r \frac{1}{W(s)} ds = \int_0^r \frac{s}{W(s)} \frac{ds}{s} = \int_0^r \Psi(s)\frac{ds}{s}.$$

Como en el caso anterior $\Psi(t)$ satisface las hipótesis del Lema 4.8.6 y por tanto

$$\int_0^r \frac{1}{W(s)} ds \approx \frac{r}{W(r)}.$$

Entonces, para $0 < t < r$, puesto que W es creciente y positiva

$$\frac{r}{W(r)} \approx \int_0^r \frac{1}{W(s)} ds \geq \int_0^t \frac{1}{W(s)} ds \gtrsim \frac{1}{W(t)} t$$

donde se deduce que $w \in B_{1,\infty}$. $\square$

El siguiente resultado da una caracterización de los espacios $\Lambda^q(w)$, $1 \leq q < \infty$, en términos de los coeficientes de bases de ondículas.

Proposición 4.8.19. *Sean* $1 \leq q < \infty$, $w \in \mathrm{W}$ *(ver 4.14) tal que* $0 < i_W \leq I_W < q$ *con* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$. *Sea* $\{\psi^l : l = 1, 2, \dots, L\}$ *un sistema de ondículas con regularidad* $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$ *(ver Definición 4.1.2). Entonces,* $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D},\ l = 1, 2, \dots, L\}$ *es una base incondicional de* $\Lambda^q(w)$ *y*

$$\|f\|_{\Lambda^q(w)} \approx \|S_\psi(f)\|_{\Lambda^q(w)} \tag{4.163}$$

donde

$$S_\psi(f)(x) = \Big(\sum_{l=1}^{L} \sum_{Q \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_Q^l \rangle|^2 |Q|^{-1} \chi_Q(x) \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.164}$$

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 1 de [69] porque bajo las hipótesis que tenemos $0 < \alpha_{\Lambda^q(w)} \leq \beta_{\Lambda^q(w)} = \frac{I_W}{q} < 1$ y como $i_W \leq I_W < q$ los espacios $\Lambda^q(w)$ son de Banach debido al Lema 4.8.18 y la Proposición 4.8.15. □

Ejemplo 4.8.20. *Para* $w(t) = \frac{q}{p} t^{\frac{q}{p}-1}$, $i_W = I_W = \frac{q}{p}$ *y si suponemos* $1 < p < \infty$, *se cumplen las hipótesis de la Proposición anterior, obteniendo la Proposición 4.7.8 como caso particular de la Proposición 4.8.19*

Ejemplo 4.8.21. *Sea* $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1}(\log(e+t))^{\beta q}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Por los ejemplos 4.8.9 y 4.8.10 sabemos que* $i_W = I_W = \frac{q}{p}$. *Por tanto, si* $1 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$, *las bases de ondículas de regularidad* $\mathcal{R}^{0,M}$, *con* $M > d$, *son bases incondicionales de los espacios de Lorentz-Zygmund* $L^{p,q}(\log L)^\beta$ *y se tiene la correspondiente caracterización como en (4.163).*

Antes de estudiar las funciones de democracia de bases de ondículas en los espacios $\Lambda^q(w)$, daremos un resultado de naturaleza similar al probado en el Lema 4.3.6.

Definición 4.8.22. *Sea* $W \geq 0$ *definida en* $(0, \infty)$ *y creciente.*

(a) Decimos que W *es* ***fuertemente creciente*** *si existe* $C > 0$ *tal que*

$$\frac{W(t_1)}{t_1} \leq C \frac{W(t_2)}{t_2} \quad \forall\ 0 < t_1 \leq t_2 < \infty.$$

(b) Decimos que W *es* ***débilmente creciente*** *si existe* $C > 0$ *tal que*

$$\frac{W(t_1)}{t_1} \geq C \frac{W(t_2)}{t_2} \quad \forall\ 0 < t_1 \leq t_2 < \infty.$$

Por ejemplo si w es creciente, W es convexa por tanto fuertemente creciente y si w es decreciente W es cóncava, por tanto débilmente creciente.

Lema 4.8.23. *Sean $N_1, \dots, N_J$, $N_1 + \dots + N_J = N$ y $W \geq 0$ definida en $(0, \infty)$ y creciente.*

(a) Si W es fuertemente creciente

$$N \lesssim \sum_{j=1}^{J} h_W^{\pm}(N_j) \lesssim h_W^{\pm}(N).$$

(b) Si W es débilmente creciente

$$h_W^{\pm}(N) \lesssim \sum_{j=1}^{J} h_W^{\pm}(N_j) \lesssim N.$$

Demostración. (a) Para $0 < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty$ tenemos

$$\frac{h_W^{+}(\tau_1)}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1} \sup_{t>0} \frac{W(\tau_1 t)}{W(t)} = \sup_{t>0} \frac{W(\tau_1 t)/\tau_1 t}{W(t)/t} \leq C \sup_{t>0} \frac{W(\tau_2 t)/\tau_2 t}{W(t)/t} = C \frac{h_W^{+}(\tau_2)}{\tau_2}$$

y análogamente

$$\frac{h_W^{-}(\tau_1)}{\tau_1} \leq C \frac{h_W^{-}(\tau_2)}{\tau_2}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{J} h_W^{\pm}(N_j) = \sum_{j=1}^{J} N_j \frac{h_W^{\pm}(N_j)}{N_j} \leq \frac{h_W^{\pm}(N)}{N} \sum_{j=1}^{J} N_j = C h_W^{\pm}(N).$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{J} h_W^{\pm}(N_j) = \sum_{j=1}^{J} N_j \frac{h_W^{\pm}(N_j)}{N_j} \geq \frac{1}{C} \frac{h_W^{\pm}(1)}{1} \sum_{j=1}^{J} N_j = C' N.$$

(b) Como en la demostración de (a) se deduce

$$\frac{h_W^{\pm}(\tau_1)}{\tau_1} \geq C \frac{h_W^{\pm}(\tau_2)}{\tau_2}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{J} h_W^{\pm}(N_j) = \sum_{j=1}^{J} N_j \frac{h_W^{\pm}(N_j)}{N_j} \leq \frac{1}{C} \frac{h_W^{\pm}(1)}{1} \sum_{j=1}^{J} N_j = C' N.$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{J} h_W^{\pm}(N_j) = \sum_{j=1}^{J} N_j \frac{h_W^{\pm}(N_j)}{N_j} \geq C \frac{h_W^{\pm}(N)}{N} \sum_{j=1}^{J} N_j = C h_W^{\pm}(N).$$

□

4.8.2. Funciones de democracia

A la vista de la proposición 4.8.19 que da una caracterización de $\Lambda^q(w)$ usando coeficientes de bases de ondículas, para estudiar las funciones de democracia de estas bases consideraremos los correspondientes espacios de sucesiones $\mathfrak{s}\Lambda^q(w)$, para luego transferir los resultados obtenidos al caso $\Lambda^q(w)$.

Definición 4.8.24. *Sean* $0 < q < \infty$ *y* $w \in \mathrm{W}$ *tal que* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$. *Definimos* $\mathfrak{s}\Lambda^q(w)$ *como el espacio de todas las sucesiones* $\boldsymbol{s} = \{s_Q\}_{Q\in\mathcal{D}}$ *($\mathcal{D}$ cubos diádicos en $\mathbb{R}^d$) de números complejos tal que*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} = \Big\| \Big(\sum_{Q\in\mathcal{D}} (|s_Q|^2 \chi_Q(\cdot)|Q|^{-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Lambda^q(w)} < \infty. \tag{4.165}$$

Como en secciones anteriores, basta estudiar el caso $L = 1$, ya que la suma finita que aparece en (4.164) solo hace variar las constantes en las estimaciones.

Puesto que $W \in \Delta_2$ los espacios $\mathfrak{s}\Lambda^q(w)$ son cuasi-Banach. En estos espacios estudiamos las funciones de democracia de la base canónica $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{e}_Q : Q \in \mathcal{D}\}$ donde

$$\mathbf{e}_Q = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } Q = Q' \\ \\ 0, & Q \neq Q' \end{array} \right\}$$

Proposición 4.8.25. *Sean* $0 < q < \infty$ *y* $w \in \mathrm{W}$ *tal que* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$ *con* $i_W > 0$. *Sea* $\Gamma \subset \mathcal{D}$ *con* $|\Gamma| = N$ *y escribimos*

$$\widetilde{1}_\Gamma = \sum_{Q\in\mathcal{D}} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)}}.$$

(a) Si W es fuertemente creciente, $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \gtrsim N^{\frac{1}{q}}$

(b) Si W es débilmente creciente, $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \gtrsim [h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}}$.

Demostración. Para cada elemento $\mathbf{e}_Q$ de la base $\mathcal{B}_c$ tenemos

$$\|\mathbf{e}_Q\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} = |Q|^{-\frac{1}{2}} \|\chi_Q\|_{\Lambda^q(w)} = |Q|^{-\frac{1}{2}} W(|Q|)^{\frac{1}{q}} \tag{4.166}$$

debido a la Definición 4.8.24 y a la fórmula (4.143).

Como $i_W > 0$, de (4.152) se deduce que podemos elegir $L_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_W^+(2^{-L_0 d}) < 1$. Para $l = 0, 1, 2 \ldots, L_0 - 1$ y $j \in \mathbb{Z}$ escribimos $\Gamma_{l,j} = \{Q \in \Gamma : |Q| = 2^{-d(l+jL_o)}\}$, de manera que $\Gamma = \bigcup_{l,j} \Gamma_{l,j}$ (unión disjunta) y

$$\sum_{l=0}^{L_0-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Gamma_{l,j}| = |\Gamma| = N \tag{4.167}$$

y todas las sumas en (4.167) son sobre una cantidad finita de índices. Escribimos $\Gamma_l = \bigcup_j \Gamma_{l,j}$. Usando (4.166) y la inclusión continua $\ell^2(\Gamma_l) \hookrightarrow \ell^\infty(\Gamma_l)$, $l = 0, 1, \ldots, L_0 - 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} &= \Big\| \sum_{Q\in\mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{2}} W(|Q|)^{-\frac{1}{q}} \mathbf{e}_Q \Big\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \\
&\approx \sum_{l=0}^{L_0-1} \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_l} |Q|^{\frac{1}{2}} W(|Q|)^{-\frac{1}{q}} \mathbf{e}_Q \Big\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \\
&= \sum_{l=0}^{L_0-1} \Big\| \Big(\sum_{Q\in\Gamma_l} W(|Q|)^{-\frac{2}{q}} \chi_Q(\cdot) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Lambda^q(w)} \qquad (4.168) \\
&\geq \sum_{l=0}^{L_0-1} \Big\| \sup_{Q\in\Gamma_l} W(|Q|)^{-\frac{1}{q}} \chi_Q(\cdot) \Big\|_{\Lambda^q(w)}. \qquad (4.169)
\end{aligned}$$

Para $l = 0, 1, \ldots, L_0 - 1$ sea $F_l = \sup_{Q\in\Gamma_l} W(|Q|)^{-\frac{1}{q}} \chi_Q(x)$, que es una función que solo toma una cantidad finita de valores. Queremos usar la Proposición 4.8.11, y para ello hay que elegir la sucesión $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k-\infty}^{\infty}$ adecuadamente.

Para cada $l = 0, 1, \ldots, L_0 - 1$ tomar $a_j^l = [W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-\frac{1}{q}}$, $j \in \mathbb{Z}$. De (4.146) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{a_{j+1}^l}{a_j^l} &= \Big[\frac{W(2^{-d(l+jL_0)})}{W(2^{-d(l+(j+1)L_0)})} \Big]^{\frac{1}{q}} = \Big[\frac{W(2^{-d(l+(j+1)L_0)} \cdot 2^{dL_0})}{W(2^{-d(l+(j+1)L_0)})} \Big]^{\frac{1}{q}} \\
&\geq [h_W^-(2^{dL_0})]^{\frac{1}{q}} = [h_W^+(2^{-dL_0})]^{-\frac{1}{q}} > 1 \qquad (4.170)
\end{aligned}$$

(ya que hemos elegido L_0 de manera $h_W^+(2^{-dL_0}) < 1$) y por tanto $\{a_j^l\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \mathbf{A}\ \forall\ l = 0, 1, \ldots, L_0 - 1$ (el resto de las propiedades para pertenecer $\mathbf{A}$ son fáciles de comprobar). A partir de (4.169) y por la Proposición 4.8.11 deducimos

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)}^q \gtrsim \|F_l\|_{\Lambda^q(w)}^q \approx \sum_{l=0}^{L_0-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a_j^l)^q W(\lambda_{F_l}(a_j^l)) \\
&= \sum_{l=0}^{L_0-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} [W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-1} W(|\{x \in \mathbb{R}^d : F_l(x) > [W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-\frac{1}{q}}\}|).
\end{aligned}$$

El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : F_l(x) \geq [W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-\frac{1}{q}}\}$ contiene al conjunto $\bigcup_{Q\in\Gamma_{l,j}} Q$. Por tanto

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)}^q \gtrsim \sum_{l=0}^{L_0-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{W(|\Gamma_{l,j}| 2^{-d(l+jL_0)})}{W(2^{-d(l+jL_0)})} \geq \sum_{l=0}^{L_0-1} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z} \\ \Gamma_{l,j}\neq\emptyset}} h_W^-(|\Gamma_{l,j}|) \qquad (4.171)$$

Si W es fuertemente creciente, usamos la parte izquierda de (a) del Lema 4.8.23 para obtener $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \gtrsim N^{\frac{1}{q}}$. Si W es débilmente creciente, usamos la parte izquierda de (b) del Lema 4.8.23 para obtener $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \gtrsim [h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}}$. □

Ahora buscamos acotaciones superiores para $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)}$. Para $L \in \mathbb{N}$, procediendo como al comienzo de la demostración de la Proposición 4.8.25 se tiene (ver (4.168)):

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \approx \sum_{l=0}^{L-1} \Big\| \Big(\sum_{Q\in\Gamma_l} W(|Q|)^{-\frac{2}{q}} \chi_Q(\cdot) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Lambda^q(w)} \tag{4.172}$$

donde Γ_l es como en la Proposición 4.8.25. Necesitamos linealizar la función

$$S(\widetilde{1}_\Gamma)(x) = \Big(\sum_{Q\in\Gamma} \frac{\chi_Q(x)}{W(|Q|)^{\frac{2}{q}}} \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.173}$$

para cualquier $\Gamma \subset \mathcal{D}$ finito para usarlo en (4.172). Este trabajo ya se ha hecho en el Lema 4.5.9. En este Lema tomar $w = 1$ y $\varphi(t) = [W(t)]^{\frac{1}{q}}$. Es claro que

$$i_\varphi = \frac{1}{q} i_W = \alpha_{\Lambda^q(w)}, \quad I_\varphi = \frac{1}{q} I_W = \beta_{\Lambda^q(w)}$$

(ver Corolario 4.8.17). Por tanto, si $i_W > 0$ el Lema 4.5.9 nos permite concluir

$$S(\widetilde{1}_\Gamma)(x) \approx \frac{\chi_{Q_x}(x)}{[W(|Q_x|)]^{\frac{1}{q}}} \tag{4.174}$$

para $x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q$, donde Q_x es el cubo más pequeño de Γ que contiene a x.

Proposición 4.8.26. *Sean* $0 < q < \infty$ *y* $w \in \mathrm{W}$ *tal que* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$ *con* $i_W > 0$. *Sea* $\Gamma \subset \mathcal{D}$ *con* $|\Gamma| = N$ *y escribamos*

$$\widetilde{1}_\Gamma = \sum_{Q\in\Gamma} \frac{\boldsymbol{e}_Q}{\|\boldsymbol{e}_Q\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)}}.$$

(a) Si W *es fuertemente creciente,* $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \lesssim [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}}$.

(b) Si W *es débilmente creciente,* $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \lesssim N^{\frac{1}{q}}$.

Demostración. Como $i_W > 0$, de (4.152) se deduce que podemos elegir $L_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_W^+(2^{-L_0 d}) < \frac{1}{D_W}$, donde $D_W \geq 1$ es la constante doblante definida en (4.142). Sea $\Gamma^{\text{mín}} = \{Q_x : x \in \bigcup_{Q\in\Gamma} Q\}$ y para $l = 0, 1, \ldots, L_0 - 1$ y $j \in \mathbb{Z}$ escribamos $\Gamma^{\text{mín}}_{l,j} = \{Q \in \Gamma^{\text{mín}} : |Q| = 2^{-d(l+jL_0)}\}$, de manera que $\Gamma^{\text{mín}} = \bigcup_{l,j} \Gamma^{\text{mín}}_{l,j}$ (unión disjunta) y

$$\sum_{l=0}^{L_0-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Gamma^{\text{mín}}_{l,j}| = |\Gamma^{\text{mín}}| \tag{4.175}$$

y todas las sumas en (4.175) son sobre una cantidad finita de índices. Usando los conceptos de luz y sombra dados en la subsección 4.5.2 tenemos

$$\bigcup_{Q\in\Gamma_l} Q = \bigcup_{Q\in\Gamma_l^{\text{mín}}} Light(Q), \quad l = 0,1,\ldots,L_0-1$$

donde $\Gamma_l = \bigcup_j \Gamma_{l,j}$ y $\Gamma_l^{\text{mín}} = \bigcup_j \Gamma_{l,j}^{\text{mín}}$ y los conjuntos en la última unión de la desigualdad anterior son disjuntos dos a dos. Usando (4.174) podemos escribir

$$S(\widetilde{1}_{\Gamma_l}) \approx \sum_{Q\in\Gamma_l^{\text{mín}}} \frac{\chi_{Light(Q)(x)}}{W(|Q|)^{\frac{1}{q}}}. \tag{4.176}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} &\approx \|S(\widetilde{1}_\Gamma)\|_{\Lambda^q(w)} \approx \sum_{l=0}^{L_0-1}\|S(\widetilde{1}_{\Gamma_l})\|_{\Lambda^q(w)}\\ &\approx \sum_{l=0}^{L_0-1}\Big\|\sum_{Q\in\Gamma_l^{\text{mín}}}\frac{\chi_{Light(Q)}(x)}{[W(|Q|)]^{\frac{1}{q}}}\Big\|_{\Lambda^q(w)}.\end{aligned} \tag{4.177}$$

Queremos usar la Proposición 4.8.12, y para ello hay que elegir sucesiones $\mathbf{a}^l = \{a_j^l\}_{j=-\infty}^{\infty}$ adecuadamente. Para cada $l = 0,1,\ldots,L_0-1$ tomar $a_j^l = [W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-\frac{1}{q}}$, $j\in\mathbb{Z}$. Al igual que en (4.170), usando (4.146) se tiene

$$\frac{a_{j+1}^l}{a_j^l} \ge [h_W^-(2^{dL_0})]^{\frac{1}{q}} = [h_W^+(2^{-dL_0})]^{-\frac{1}{q}} > D_W^{\frac{1}{q}} \tag{4.178}$$

(ya que hemos elegido L_0 de manera que $h_W^+(2^{-dL_0}) < \frac{1}{D_W}$) y por tanto $\{a_j^l\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \mathbf{A}_{q,W}$ $\forall\ l = 0,1,\ldots,L_0-1$. Por (4.177) y por la Proposición 4.8.12 obtenemos

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)}^q \approx \sum_{l=0}^{L_0-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}[W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-1}W(|\{x\in\mathbb{R}^d :\\ &[W(2^{-d(l+jL_0)})]^{-\frac{1}{q}} \le \sum_{Q\in\Gamma_l^{\text{mín}}}\frac{\chi_{Light(Q)(x)}}{[W(|Q|)]^{\frac{1}{q}}} < [W(2^{-d(l+(j+1)L_0)})]^{-\frac{1}{q}}\}|)\\ &\le \sum_{l=0}^{L_0-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{W(|\Gamma_{l,j}^{\text{mín}}|2^{-d(l+jL_0)})}{W(2^{-d(l+jL_0)})} \le \sum_{l=0}^{L_0-1}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ \Gamma_{l,j}^{\text{mín}}\neq\emptyset}} h_W^+(|\Gamma_{l,j}^{\text{mín}}|)\end{aligned} \tag{4.179}$$

Si W es fuertemente creciente, usamos la parte derecha de (a) en el Lema 4.8.23 para obtener $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \lesssim [h_W^+(\Gamma^{\text{mín}})]^{\frac{1}{q}} \le [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}}$ puesto que h_W^+ es creciente. Si W es débilmente creciente, usamos la parte derecha de (b) en Lema 4.8.23 para obtener $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \lesssim |\Gamma^{\text{mín}}|^{\frac{1}{q}} \le N^{\frac{1}{q}}$.

□

Las Proposiciones 4.8.25 y 4.8.26 prueban las estimaciones

$$N^{\frac{1}{q}} \lesssim h_l(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \leq h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \lesssim [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}}$$

si W es fuertemente creciente y

$$[h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}} \lesssim h_l(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \leq h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \lesssim N^{\frac{1}{q}}$$

si W es débilmente creciente, con las hipótesis $i_W > 0$ y $0 < q < \infty$.

El objetivo de las dos próximas Proposiciones es mostrar que estas dos estimaciones son precisas.

Proposición 4.8.27. *Sean* $0 < q < \infty$ *y* $w \in \mathrm{W}$ *tal que* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$. *Entonces*

$$h_l(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \lesssim [h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}} \tag{4.180}$$

y

$$h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \gtrsim [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}} \tag{4.181}$$

Demostración. Dado $k \in \mathbb{Z}$, sea $\Gamma_k = \{Q_1,\ldots,Q_N\} \subset \mathcal{D}$ una colección de cubos diádicos disjuntos de igual tamaño $|Q_j| = 2^{kd}$, $j = 1,2\ldots,N$. Como la colección Γ_k es disjunta se tiene (ver 4.168)

$$\begin{aligned} \|\widetilde{1}_{\Gamma_k}\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \quad &\approx \quad \Big\| \sum_{Q\in\Gamma_k} \frac{\chi_Q(\cdot)}{W(|Q|)^{\frac{1}{q}}} \Big\|_{\Lambda^q(w)} = \frac{1}{[W(2^{kd})]^{\frac{1}{q}}} \|\chi_{\cup_{Q\in\Gamma_k}Q}(\cdot)\|_{\Lambda^q(w)} \\ &= \Big[\frac{W(N2^{kd})}{W(2^{kd})}\Big]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.182}$$

Como $W \in \Delta_2$ se tiene

$$h_W^-(t) \approx \inf_{k\in\mathbb{Z}} \frac{W(2^{kd}t)}{W(2^{kd})} \quad y \quad h_W^+(t) \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{W(2^{kd}t)}{W(2^{kd})}$$

por lo que el resultado se sigue de (4.182). $\square$

Proposición 4.8.28. *Sean* $0 < q < \infty$ *y* $w \in \mathrm{W}$ *tal que* $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$ *e* $i_W > 0$. *Entonces*

$$h_l(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \lesssim N^{\frac{1}{q}} \tag{4.183}$$

y

$$h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \gtrsim N^{\frac{1}{q}}. \tag{4.184}$$

Demostración. Como $i_W > 0$, de (4.152) se deduce que podemos elegir $L_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_W^+(2^{-L_0 d}) < \frac{1}{D_W}$, donde $D_W \geq 1$ es la constante definida en (4.142). Dado $N \in \mathbb{N}$, sea $\Gamma = \{Q_1, \ldots, Q_N\} \subset \mathcal{D}$ uan colección de cubos diádicos disjuntos tal que $|Q_j| = 2^{-jL_0 d}$, $j = 1, 2 \ldots, N$. Como la colección Γ es disjunta se tiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} = \Big\| \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_{Q_j}(\cdot)}{[W(|Q_j|)]^{\frac{1}{q}}} \Big\|_{\Lambda^q(w)}. \tag{4.185}$$

La sucesión $a_k = [W(2^{-kL_0 d})]^{-\frac{1}{q}}$, $k \in \mathbb{Z}$ pertenece a $\mathbf{A}_{q,W}$ (como en la demostración de la Proposición 4.8.26,ver (4.178)). Usando la Proposición 4.8.12 podemos escribir

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|^q_{\mathfrak{s}\Lambda^q(w)} \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} [W(2^{-kL_0 d})]^{-1} W\Big(\Big|\Big\{x \in \mathbb{R}^d : [W(2^{-kL_0 d})]^{-\frac{1}{q}}$$
$$< \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_{Q_j}(x)}{[W(|Q_j|)]^{\frac{1}{q}}} \leq [W(2^{-(k+1)L_0 d})]^{-\frac{1}{q}}\Big\}\Big|\Big) = \sum_{j=1}^{N} \frac{W(|Q_j|)}{W(2^{-jL_0 d})} = N.$$

$\square$

Combinando las Proposiciones 4.8.25, 4.8.26, 4.8.27 y 4.8.28 se obtienen las funciones de democracia de la base $\mathcal{B}_c$ en los espacios $\mathfrak{s}\Lambda^q(w)$, salvo constantes multiplicativas.

Teorema 4.8.29. *Sean $0 < q < \infty$ y $w \in \mathrm{W}$ tal que $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$ e $i_W > 0$. Entonces*

(a) Si W es fuertemente creciente

$$N^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \leq h_r(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \approx [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}}.$$

(b) Si W es débilmente creciente

$$[h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \leq h_r(N; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\Lambda^q(w)) \approx N^{\frac{1}{q}}.$$

Este teorema, junto con la Proposición 4.8.19, nos permiten obtener, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia de bases de ondículas de regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$, en espacios $\Lambda^q(w)$. Necesitamos que este espacio sea de Banach lo que se consigue imponiendo $1 \leq q < \infty$ y $I_W < q$ (ver Lema 4.8.18). La restricción $I_W < q$ implica $w \in B_{q,\infty}$ y es necesaria para poder aplicar la Proposición 1 de [69] ya que debemos tener $\beta_{\Lambda^q(w)} = \frac{1}{q} I_W < 1$.

Teorema 4.8.30. *Sean $1 \leq q < \infty$ y $w \in \mathrm{W}$ tal que $W(t) = \int_0^t w(s)ds \in \Delta_2$ con $0 < i_W \leq I_W < q$. Sea $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D}, l = 1, 2, \ldots, L\}$ una base de ondículas con regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$. Entonces,* *(a) Si W es fuertemente creciente,*

$$N^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N;\mathcal{W},\Lambda^q(w)) \leq h_r(N;\mathcal{W},\Lambda^q(w)) \approx [h_W^+(N)]^{\frac{1}{q}}.$$

(b) Si W es débilmente creciente

$$[h_W^-(N)]^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N;\mathcal{W},\Lambda^q(w)) \leq h_r(N;\mathcal{W},\Lambda^q(w)) \approx N^{\frac{1}{q}}.$$

Ejemplo 4.8.31. *Con $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1}$ y $1 \leq q < \infty$, sabemos que $W(t) = t^{\frac{q}{p}}$ y $i_W = I_W = \frac{q}{p}$. Por tanto, si $1 < p < \infty$ se tiene $0 < i_W = I_W < q$ y el Teorema 4.8.30 implica el Teorema 4.7.14 para las bases de ondículas con regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$ en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ ya que $h_W^+(t) = h_W^-(t) = t^{\frac{p}{q}}$.*

Ejemplo 4.8.32. *Considerar ahora $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1}\log(e+t)^{\beta q}$ con $\beta > 0$ para obtener los espacios de Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^\beta$ -ver ejemplo 4.8.2. Por el ejemplo 4.8.9 sabemos que $i_W = I_W = \frac{q}{p}$ y $W(t) \approx t^{\frac{q}{p}}(\log(e+t))^{\beta q}$. De la Proposición 4.8.8 deducimos*

$$h_W^+(N) \approx N^{\frac{q}{p}}(\log N)^{\beta q} \quad y \quad h_W^-(N) \approx N^{\frac{q}{p}}.$$

Como $\frac{W(t)}{t} \approx t^{\frac{q}{p}-1}(\log(e+t))^{\beta q}$, la función $W(t)$ es fuertemente creciente si y sólo si $\frac{q}{p} \geq 1$ y débilmente creciente si y sólo si $\frac{q}{p} < 1$. Por tanto, para bases de ondículas con regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$, y para $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$ y $\beta > 0$, se tiene que si $q \geq p$

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{q}} &\approx h_l(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \leq h_r(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \\ &\approx N^{\frac{1}{p}}(\log N)^\beta \end{aligned} \tag{4.186}$$

y si $q < p$

$$N^{\frac{1}{p}} \approx h_l(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \leq h_r(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \approx N^{\frac{1}{q}}. \tag{4.187}$$

Ejemplo 4.8.33. *Considerar ahora el caso $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1}\log(e+t)^{\beta q}$ con $\beta < 0$ - ver ejemplos 4.8.2 y 4.8.9. Por el ejemplo 4.8.10 sabemos que $i_W = I_W = \frac{q}{p}$ y $W(t) \approx t^{\frac{q}{p}}(\log(e+t))^{\beta q}$. De la Proposición 4.8.8 deducimos*

$$h_W^+(N) = N^{\frac{q}{p}} \quad y \quad h_W^-(N) = N^{\frac{q}{p}}(\log N)^{\beta q}.$$

Como $\frac{W(t)}{t} \approx t^{\frac{q}{p}-1}(\log(e+t))^{q\beta}$ con $\beta < 0$, la función W es fuertemente creciente si y sólo si $\frac{q}{p} > 1$ y débilmente creciente si y sólo si $\frac{q}{p} \leq 1$. Por tanto, para bases de ondículas $\mathcal{W}$ de regularidad $\mathcal{R}^{0,M}$, $M > d$, y para $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, se tiene que si $q > p$

$$N^{\frac{1}{q}} \approx h_l(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \leq h_r(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \approx N^{\frac{1}{p}}$$

y si $q \leq p$

$$N^{\frac{1}{p}}(\log N)^\beta \approx h_l(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \leq h_r(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\log L)^\beta) \approx N^{\frac{1}{q}}.$$

Los resultados del capítulo 3, y en particular el Teorema 3.6.1 nos dan inclusiones de los espacios de aproximación y de las clases avariciosas para $\Lambda^q(w)$ en espacios de Lorentz discretos de la forma $\ell^\tau_\eta(\mathcal{B}_c,\Lambda^q(w))$ para η apropiadas.

Capítulo 5

Más resultados sobre los espacios de aproximación y las clases avariciosas

5.1. No linealidad de $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$

En esta sección mostramos con un ejemplo simple que la clase $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ puede que no sea lineal cuando $\mathcal{B}$ no es democrática.

Recordamos que la clase $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver (3.9)) es el conjunto de todas las funciones $x \in \mathbb{X}$ tales que

$$\|x\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} := \|x\|_{\mathbb{X}} + \Big[\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \gamma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X})^q \frac{1}{k}\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty, \; 0<q<\infty$$

y

$$\|x\|_{\mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B}_c,\mathbb{X})} := \|x\|_{\mathbb{X}} + \sup_{k\geq 1} k^\alpha \gamma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X}),$$

donde $\gamma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) = \sup_\pi \|x - G_k^\pi(x)\|_{\mathbb{X}}$ y el supremo se toma sobre todas las biyecciones π de $\mathbb{N}$ que satisfacen (3.4) (ver definición (3.8)).

Proposición 5.1.1. *Sea $\mathbb{X} = \ell^p \oplus_{\ell^1} \ell^q$, $0 < q < p < \infty$; es decir $\mathbb{X}$ es el conjunto de todos de todas las sucesiones $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \in \ell^p \times \ell^q$ dotado con la norma*

$$\|\boldsymbol{s}\|_{\ell^p} + \|\boldsymbol{t}\|_{\ell^q} < \infty.$$

y $\mathcal{B}_c$ la base canónica en $\mathbb{X}$. Sean $x = \{(k^{-\beta},0)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{X}$ con $\beta = \alpha + \frac{1}{p}$ e $y = \{(0, j^{-\gamma})\} \in \mathbb{X}$ con $\gamma = \alpha + \frac{1}{q}$. Entonces $x, y \in \mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B}_c,\mathbb{X})$, pero $x + y \notin \mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B}_c,\mathbb{X})$.

Demostración. Para $N = 1,2,3,\ldots$ tenemos

$$\gamma_N(x) = \Big(\sum_{k>N} \frac{1}{k^{\beta p}}\Big)^{\frac{1}{p}} \approx \Big(\frac{1}{N^{\beta p - 1}}\Big)^{\frac{1}{p}} = N^{-\alpha}.$$

Por tanto, tenemos

$$\|x\|_{\mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} = \sup_N N^{-\alpha}N^\alpha = 1.$$

Esto prueba que $x \in \mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$. De forma similar, si tomamos $\gamma = \alpha + \frac{1}{q}$, entonces $y = \{(0, j^{-\gamma})\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

Vamos a probar que $x+y \notin \mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$. Consideramos el siguiente conjunto de índices

$$A_1 = \{1\} \quad y \quad A_j = \Big\{k \in \mathbb{N} : \frac{1}{j^\gamma} \le \frac{1}{k^\beta} < \frac{1}{(j-1)^\gamma}\Big\},\ j = 2,3,\ldots$$

Tenemos

$$|A_j| \approx j^{\frac{\gamma}{\beta}} - (j-1)^{\frac{\gamma}{\beta}} \approx j^{\frac{\gamma}{\beta}-1}, \quad j = 1,2,\ldots \tag{5.1}$$

Para $J = 2,3,4,\ldots$ sea $N_J = \sum_{j=1}^J |A_j| + J$. De (5.1) y puesto que $\gamma > \beta$ se obtiene

$$N_J \approx \sum_{j=1}^J j^{\frac{\gamma}{\beta}-1} + J \approx J^{\frac{\gamma}{\beta}} + J \approx J^{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_{N_J}(x+y) \;&\approx\; \Big(\sum_{k>J^{\frac{\gamma}{\beta}}} k^{-\beta p}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{j>J} j^{-\gamma q}\Big)^{\frac{1}{q}} \approx [(J^{\frac{\gamma}{\beta}})^{-\beta p+1}]^{\frac{1}{p}} + [J^{-\gamma q+1}]^{\frac{1}{q}}\\ &= [J^{\frac{\gamma}{\beta}}]^{-\beta+\frac{1}{p}} + (J^{-\gamma+\frac{1}{p}}) = J^{-\frac{\gamma\alpha}{\beta}} + J^{-\alpha} \approx J^{-\alpha} \approx (N_J)^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\|(x+y)\|_{\mathscr{G}_\infty^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \;&=\; \sup_{N=1,2,\ldots} N^\alpha \gamma_N(x+y) \gtrsim \sup_{J=2,3,4,\ldots} N_J^\alpha (N_J)^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}\\ &= \sup_{J=2,,3,\ldots} N_J^{\alpha(1-\frac{\beta}{\gamma})} = \infty.\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado. □

5.2. Funciones de democracia para $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$

Dada una base incondicional $\mathcal{B}$ en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\mathbb{X})$, nuestro propósito en esta sección es calcular, salvo constantes multiplicativas, las funciones de democracia de $\mathcal{B}$ en los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y en las clases $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, en términos de las funciones de democracia de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{X}$. Denotaremos por

$$h_l(N;\mathcal{A}_q^\alpha), \quad h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha)$$

y

$$h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha), \quad h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha)$$

las funciones de democracia de $\mathcal{B}$ por la izquierda y por la derecha para los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y las clases $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ respectivamente (recordar la definición de funciones de democracia dadas en la sección 2.5).

Comenzamos calculando las funciones $h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha)$ y $h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha)$.

Teorema 5.2.1. *Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$ fijos. Sea $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ y supongamos que $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es doblante. Entonces, tenemos*

$$a)\ h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$$

$$b)\ h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

En particular $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ si y sólo si $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathbb{X}$.

Demostración. $a)$ De la inclusion

$$\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$$

(ver Teorema 3.6.1) y del Lema 3.3.5 se tiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \lesssim \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \lesssim N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}),$$

ya que $k^\alpha h_r(k) \in \mathbb{W}_+$. Esto prueba una de las desigualdades de $a)$. Para la desigualdad contraria tomamos $N = 2^m$. Elegimos $\Gamma_{m-1} \subset \mathbb{N}$ tal que $|\Gamma_{m-1}| = 2^{m-1}$ y

$$\frac{1}{2}h_r(2^{m-1};\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq \|\widetilde{1}_{\Gamma_{m-1}}\|_{\mathbb{X}}.$$

Elegimos $\widetilde{\Gamma} \subset \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\Gamma} \cap \Gamma_{m-1} = \emptyset$ y $|\widetilde{\Gamma}| = 2^{m-1}$. Sea $\Gamma_m = \widetilde{\Gamma} \cup \Gamma_{m-1}$ de manera que $|\Gamma_m| = 2^m$. Entonces

$$\begin{aligned}\gamma_{2^{m-1}}(\widetilde{1}_{\Gamma_m};\mathcal{B},\mathbb{X}) &= \sup_{\substack{\Gamma\subset\Gamma_m \\ |\Gamma|=2^{m-1}}} \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathbb{X}} \geq \|\widetilde{1}_{\Gamma_{m-1}}\|_{\mathbb{X}} \geq \frac{1}{2}h_r(2^{m-1};\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\geq \frac{1}{2}D^{-1}h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debida a la propiedad doblante de $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver Proposición 2.5.2). Por tanto, usando la equivalencia (3.10),

$$\begin{aligned} h_r(2^m;\mathscr{G}_q^\alpha) &\geq \|\widetilde{1}_{\Gamma_m}\|_{\mathscr{G}_q^\alpha} \geq C_{\alpha,q}2^{(m-1)\alpha}\gamma_{2^{m-1}}(\widetilde{1}_{\widetilde{\Gamma}_m};\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\geq C'_{\alpha,q}2^{m\alpha}h_r(2^m;\mathcal{B},\mathbb{X}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde la segunda desigualdad en (5.2) es debida a que la suma en (3.10) contiene el término $2^{m-1}\gamma_{2^{m-1}}(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$. Esto prueba el resultado para este caso.

Para N general elegimos $m\in\mathbb{N}$ tal que $2^m\leq N<2^{m+1}$ y de (5.2) y las propiedades de $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ deducimos

$$\begin{aligned} h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha) &\geq h_r(2^m;\mathscr{G}_q^\alpha) \geq C'_{\alpha,q}2^{m\alpha}h_r(2^m;\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\geq C'_{\alpha,q}2^{m\alpha}D^{-1}h_r(2^{m+1};\mathcal{B},\mathbb{X}) \geq C'_{\alpha,q}D^{-1}2^{m\alpha}h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\geq C'_{\alpha,q}D^{-1}\frac{2^{m\alpha}}{2^{(m+1)\alpha}}N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\geq C_{\alpha,q}N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Las desigualdades (5.2) y (5.3) prueban a).

Nota 5.2.2. *Observar que debido a la definición de $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, $h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha)$ es creciente. Este hecho ha sido usado en la primera desigualdad de (5.3).*

Para la demostración de b), usando 4. del Teorema 3.5.2 con $\eta(k)=h_l(k;\mathcal{B},\mathbb{X})$, para todo $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N,\ N=1,2,3,\ldots$ tenemos

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_{k^\alpha h_l(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}\leq C_{\alpha,q}\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}. \tag{5.4}$$

Tomando el ínfimo sobre todos los conjuntos $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$ y usando el Lema 3.3.5 se deduce

$$h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})N^\alpha\approx h_l(N;\mathcal{B},\ell^q_{k^\alpha h_l(k)})\lesssim h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha). \tag{5.5}$$

Esto prueba una de las desigualdades de b). Para la desigualdad contraria, dado $N=1,2,3,\ldots$ primero elegir un conjunto $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$ tal que

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathbb{X}}\leq 2h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$$

lo cual es posible debido a la definición de $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$. Entonces, usando la desigualdad (3.34) se tiene

$$h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha)\leq\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}\lesssim N^\alpha\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathbb{X}}\lesssim N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.6}$$

Las desigualdades (5.5) y (5.6) prueban el resultado. $\square$

En el Teorema siguiente damos un resultado para las funciones de democracia de $\mathcal{B}$ en los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

Teorema 5.2.3. *Sean $\alpha > 0$ y $0 < q \leq \infty$ fijos. Sea $\mathcal{B}$ una base incondicional para un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ y supongamos que $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es doblante. Entonces,*

$$a)\ h_l(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

$$b)\ h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \lesssim N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

En particular, si $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathbb{X}$ entonces es democrática en $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

Demostración. a) La inclusión $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ produce

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \lesssim \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}.$$

Tomando el ínfimo sobre todos los $\Gamma \subset \mathbb{N}$ tal que $|\Gamma| = N$ y usando la parte b) del Teorema 5.2.1 se obtiene

$$h_l(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \lesssim h_l(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.7}$$

Para la desigualdad "$\gtrsim$", de la inclusión $\mathscr{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_l(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver parte 3. del Teorema 3.5.2) obtenemos

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \gtrsim \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_{k^\alpha h_l(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}.$$

Tomando el ínfimo sobre todos los conjuntos que $\Gamma \subset \mathbb{N}$ tales que $|\Gamma| = N$ y usando el Lema 3.3.5 se obtiene

$$h_l(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \gtrsim h_l(N;\mathcal{B},\ell^q_{k^\alpha h_l(k)}) \approx N^\alpha h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.8}$$

Las desigualdades (5.9) y (5.8) prueban a).

b) Puesto que $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$, usando la parte a) del Teorema 5.2.1 se deduce

$$h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \lesssim h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \tag{5.9}$$

$\square$

Nota 5.2.4. *Obsérvese que solo hemos probado $h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) \lesssim N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ para toda base incondicional en un espacio cuasi-Banach $\mathbb{X}$. Está claro que si $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathbb{X}$ la equivalencia es cierta, puesto que en este caso del Teorema 5.2.1 se obtiene*

$$h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \approx h_r(N;\mathscr{G}_q^\alpha) \approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

Por otro lado existen ejemplos en los que la parte b) del Teorema 5.2.3 es una desigualdad estricta. Tal es el caso del espacio $BMO(\mathbb{R})$ de funciones de oscilación média acotada con la base de ondículas de Franklin o los correspondientes espacios de sucesiones *bmo* de la subsección 4.6.2. En el Teorema 4.6.5 se demuestra que

$$h_r(N;\mathcal{B}_c,bmo)\approx\sqrt{\log N}$$

mientras que R. Rochberg y M. Taibleson ([65]) prueban que

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B}_c,bmo)=\mathcal{A}_q^\alpha(\ell^\infty)=\ell^{\frac{1}{\alpha},q}$$

(ver Nota 4.6.8) por lo que

$$h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha)\approx N^\alpha$$

mientras que

$$N^\alpha h_r(N;\mathcal{B}_c,bmo)\approx N^\alpha\sqrt{\log N}\gtrsim N^\alpha.$$

Mas ejemplos similares son los espacios bmo_r de la nota 4.6.9.

5.3. La propiedad H y consecuencias

En esta sección damos una condición suficiente para que se verifique la equivalencia $h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha)\approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ para bases no democráticas.

Definición 5.3.1. *Sea $\mathcal{B}=\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Decimos que $\mathcal{B}$ satisface la **Propiedad (H)** si para cada $n=1,2,\dots$ existe $\Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=2^n$ que satisface la propiedad*

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathbb{X}}\approx h_r(2^{n-1};\mathcal{B},\mathbb{X}),\quad\forall\ \Gamma'\subset\Gamma_n\ \textit{con}\ |\Gamma'|=2^{n-1}.$$

Observar que las bases democráticas satisfacen la propiedad (H) ya que $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\approx h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ y por tanto $\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathbb{X}}\approx h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\ \forall\ \Gamma\subset\mathbb{N}$ con $|\Gamma|=N$.

Proposición 5.3.2. *Sea $\mathcal{B}=\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. Supongamos que $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (H). Entonces, para todo $\alpha>0$ y todo $0<q\le\infty$ se tiene*

$$h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha)\approx N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

Demostración. Para la demostración de la desigualdad "$\gtrsim$" procedemos como en la demostración del Teorema 5.2.1. Dado $N=2^n$, elegimos un conjunto Γ_n como en al definición 5.3.1. Entonces, usando (3.3) se obtiene

$$\sigma_{2^{n-1}}(\widetilde{1}_\Gamma)_{\mathbb{X}}=\inf_{y\in\Sigma_{2^{n-1}}}\|\widetilde{1}_\Gamma-y\|_{\mathbb{X}}=\inf_{\substack{|\Gamma'|=2^{n-1}\\ \Gamma'\subset\Gamma}}\|\widetilde{1}_{\Gamma}\|_{\mathbb{X}}\approx h_r(2^{n-1};\mathcal{B},\mathbb{X}).\tag{5.10}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) &\geq \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \gtrsim \Big[\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k\alpha q}\sigma_{2^k}(\widetilde{1}_\Gamma)_{\mathbb{X}}^q\Big]^{\frac{1}{q}} \gtrsim 2^{(n-1)\alpha}\sigma_{2^{n-1}}(\widetilde{1}_\Gamma)_{\mathbb{X}} \\ &\gtrsim 2^{n\alpha} h_r(2^{n-1},\mathcal{B},\mathbb{X}) \gtrsim 2^{n\alpha} h_r(2^n,\mathcal{B},\mathbb{X}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde la última desigualdad es debida a la propiedad doblante de $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$.

Para N general, escogemos $n = 1, 2, \ldots,$ tal que $2^n \leq N < 2^{n+1}$. Entonces, del resultado anterior y de la propiedad doblante de $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$

$$\begin{aligned} h_r(N;\mathcal{A}_q^\alpha) &\geq h_r(2^n;\mathcal{A}_q^\alpha) \gtrsim 2^{n\alpha} h_r(2^n;\mathcal{B},\mathbb{X}) \\ &\gtrsim 2^{n\alpha} h_r(2^{n+1},\mathcal{B},\mathbb{X}) \gtrsim N^\alpha h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \end{aligned}$$

La desigualdad contraria es la parte b) del Teorema 5.2.3. □

La propiedad (H) permite obtener mejores inclusiones que las del Corolario 3.4.9.

Corolario 5.3.3. *Supongamos que $(\mathbb{X},\mathcal{B})$ satisface la Propiedad (H). Si para algunos $\alpha > 0$, $0 < q \leq \infty$ y $\omega \in \mathbb{W}_+$ tenemos $\ell^q_\omega(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ entonces $\omega(k) \gtrsim k^\alpha h_r(k)$ necesariamente y por tanto, $\ell^q_\omega(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \ell^q_{k^\alpha h_r(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$*

Demostración. La inclusión $\ell^q_w(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ implica que, para $\Gamma \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = k$ se tiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \lesssim \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_w(\mathcal{B},\mathbb{X})} \approx w(k).$$

Tomando el supremo sobre tales Γ y usando la Proposición 5.3.2 deducimos $k^\alpha h_r(k) \lesssim w(k)$. □

A continuación damos algunos ejemplos de espacios de funciones y bases de ondículas no democráticas en los que se verifica la propiedad (H).

Ejemplo 5.3.4. *Si $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D}, l = 1, \ldots, L\} \subset \mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$ es una base de ondículas en un espacio de Orlicz $L^\Phi(\mathbb{R}^d)$ con los índices de Boyd entre 0 y 1, entonces, $\mathcal{W}$ satisface la propiedad (H).*

Del teorema 1.2 en [29] (ver también (4.11)) se tiene

$$h_r(N;\mathcal{W}, L^\Phi(\mathbb{R}^d)) \approx \sup_{s>0} \frac{\varphi(Ns)}{\varphi(s)}. \tag{5.12}$$

Además, cualquier colección de N cubos diádicos disjuntos $\Gamma \subset \mathbb{N}$ de igual tamaño fijo $a > 0$ satisface

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{L^\Phi(\mathbb{R}^d)} \approx \frac{\varphi(Na)}{\varphi(a)} \tag{5.13}$$

(ver por ejemplo Lema 3.1 en [29]). Sea Γ una colección de cubos diádicos disjuntos con $|\Gamma| = 2^n,\ n = 1,2,3,\dots$ del mismo tamaño $|Q| \geq 1$. Para cualquier subcolección $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 2^{n-1}$ de (5.13) y de la propiedad doblante de φ y h_r tenemos

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathbb{X}} \approx \frac{\varphi(2^{n-1}|Q|)}{\varphi(|Q|)} \approx \frac{\varphi(2^n|Q|)}{\varphi(|Q|)} \approx h_r(2^n;\mathcal{W},\mathbb{X}) \approx h_r(2^{n-1};\mathcal{W},\mathbb{X}).$$

Esto prueba la propiedad (H) para este caso.

Ejemplo 5.3.5. *Si $\mathcal{W} = \{\psi_Q^l : Q \in \mathcal{D}, l = 1,2,\dots,L\} \subset \mathcal{R}^{0,M}$ con $M > d$ es una base de ondículas en un espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^d),\ 1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty$ entonces satisface la propiedad (H).*

Por un lado, del Teorema 4.7.14 (ver capítulo 4 sección 4.7) tenemos

$$h_l(N;\mathcal{W},L^{p,q}(\mathbb{R}^d)) \approx N^{\frac{1}{\text{máx}(p,q)}}, \quad h_r(N;\mathcal{W},\mathbb{X}) \approx N^{\frac{1}{\text{mín}(p,q)}}. \tag{5.14}$$

Elegir una familia de cubos diádicos disjuntos Γ con $|\Gamma| = 2^n,\ n = 1,2,\dots$ que tienen el mismo tamaño $|Q|$. Supongamos que $p \leq q$. Para cualquier subcolección $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 2^{n-1}$, de la parte i) del Lema 4.7.12 (ver capítulo 4, sección 4.7) se tiene

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)} \approx (2^{n-1})^{\frac{1}{p}} = |\Gamma'|^{\frac{1}{\text{mín}(p,q)}} \approx h_r(2^{n-1};\mathcal{W},L^{p,q}(\mathbb{R}^d)).$$

Esto prueba que $\mathcal{W}$ satisface la propiedad (H) cuando $p \leq q$.

Para $q < p$, elegimos una colección de cubos diádicos disjuntos Γ con $|\Gamma| = 2^n,\ n = 1,2,\dots$ de tamaños diferentes. Para cualquier subcolección $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 2^{n-1}$, de la parte ii) del Lema 4.7.12 se obtiene

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathbb{X}} \approx (2^{n-1})^{\frac{1}{q}} = |\Gamma'|^{\frac{1}{\text{mín}(p,q)}} \approx h_r(2^{n-1};\mathcal{W},\mathbb{X}).$$

Esto prueba que $\mathcal{W}$ también satisface la propiedad (H) para $q < p$.

Ejemplo 5.3.6. *Las bases $\mathcal{B}_c$ en los espacios de sucesiones de Besov $\mathfrak{s}\dot{B}_{p,q}^\Psi(w)$ ó $\mathfrak{s}B_{p,q}^\Psi(w)$ (ver definición 4.3.7) también satisfacen la propiedad (H). Mostraremos como ejemplo el caso $\mathfrak{s}\dot{B}_{p,q}^\Psi(w)$ para el que se tiene*

$$h_l(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\dot{B}_{p,q}^\Psi(w)) = \text{mín}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}$$

y

$$h_r(N;\mathcal{B}_c,\mathfrak{s}\dot{B}_{p,q}^\Psi(w)) = \text{máx}\{N^{\frac{1}{p}}, N^{\frac{1}{q}}\}$$

de acuerdo con los resultados obtenidos en el Teorema 4.3.9.

Supongamos que $p \leq q$. Dado $n = 1, 2, 3, \ldots$ elegir Γ una familia de cubos diádicos disjuntos de tamaño fijo con $|\Gamma| = 2^n$. Para cualquier subcolección $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 2^{n-1}$, (4.50) nos dice que

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)} \approx h_r(2^{n-1}; \mathcal{B}_c, \mathfrak{s}\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)).$$

Por tanto, $\mathcal{B}_c$ satisface la propiedad (H) si $p \leq q$.

Para $q < p$ tomar una colección Γ de cubos diádicos disjuntos de diferente tamaño y usar (4.51) para probar que $\mathcal{B}_c$ tiene la propiedad (H) en este caso.

Cuando los espacios $\dot{B}^{\Psi}_{p,q}(w)$ ó $B^{\Psi}_{p,q}(w)$ tienen una caracterización con bases de ondículas como las descritas en las Proposiciones 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.5 tales bases $\mathcal{W}$ tienen también la propiedad (H). En estos casos el tipo de ondículas que se usa así como los pesos w deben restringirse en cada situación para adaptarse a los resultados correspondientes.

5.4. Inclusiones continuas estrictas entre los espacios $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ y las clases $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$

Sea $\mathcal{B}$ una base en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. De la desigualdad $\sigma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq \gamma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver (3.2) y (3.8)) se deduce la inclusión $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ con continuidad. Se sabe que existen algunas bases condicionales no democráticas para las cuales se verifica la igualdad $\mathscr{G}_q^\alpha = \mathcal{A}_q^\alpha$ (ver [30], Nota 6.2). Cuando $\mathcal{B}$ es incondicional y democrática en $\mathbb{X}$ sabemos que existe $C > 1$ tal que $\frac{1}{C}\gamma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq \sigma_k(x;\mathcal{B},\mathbb{X})$ (ver definición en la sección 3.2) y por lo tanto, $\mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) = \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{B})$ con las cuasi-normas equivalentes. Por eso, es natural preguntar si, dada una base incondicional, la inclusión continua $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ implica que $\mathcal{B}$ es democrática en $\mathbb{X}$. O sea, lo que es lo mismo, si $\mathcal{B}$ no es democrática en $\mathbb{X}$, entonces esta inclusión continua no puede ser cierta. No sabemos como probar este resultado para el caso general. En esta sección probamos que la inclusión $\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ falla cuando la diferencia entre $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ y $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})$ es por lo menos logarítmica (e incluso menos que eso).

Proposición 5.4.1. *Sea* $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una base incondicional en un espacio cuasi-Banach* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ *y* $\alpha > 0$. *Supongamos que existen enteros* $p_N \geq q_N \geq 1,\ N = 1, 2, \ldots$ *tales que*

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{p_N}{q_N} = \infty \qquad \frac{h_r(q_N)}{h_l(p_N)} \gtrsim \left(\frac{p_N}{q_N}\right)^\alpha. \tag{5.15}$$

Entonces la inclusión continua $\mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathscr{G}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ *no es cierta para cualquier* $\tau \in (0,\infty]$.

Demostración. Para cada N, elegir $\Gamma_l,\ \Gamma_r \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma_l| = p_N,\ |\Gamma_r| = q_N$ y tal que

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma_l}\|_{\mathbb{X}} \leq 2h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X}), \quad \|\widetilde{1}_{\Gamma_r}\|_{\mathbb{X}} \geq \frac{1}{2}h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.16}$$

Sea $x_N = \widetilde{1}_{\Gamma_r} + 2\cdot\widetilde{1}_{\Gamma_l-\Gamma_l\cap\Gamma_r}$. Puesto que $|\Gamma_l - \Gamma_L\cap\Gamma_r| \geq p_N - q_N$, cuando $k\in[1, p_N-q_N]$ tenemos

$$\|x_N - G_k^\pi(x_N)\|_{\mathbb{X}} \geq \|\widetilde{1}_{\Gamma_r}\|_{\mathbb{X}} \geq \frac{1}{2}h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}).$$

Puesto que $p_N - q_N > p_N/2$ (notar que $\frac{p_N}{q_N}\geq 2$ para N grande) deducimos

$$\|x_N\|_{\mathscr{G}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \geq \Big[\sum_{k=1}^{\frac{p_N}{2}}(k^\alpha\frac{1}{2}h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}))^\tau\frac{1}{k}\Big]^{\frac{1}{\tau}} \gtrsim p_N^\alpha h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.17}$$

Por otro lado, podemos estimar la norma de x_N de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\|x_N\|_{\mathbb{X}} &\lesssim \|\widetilde{1}_{\Gamma_r}\|_{\mathbb{X}} + \|\widetilde{1}_{\Gamma_l-\Gamma_l\cap\Gamma_r}\|_{\mathbb{X}} \leq h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) + 2h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X})\\ &\lesssim h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})\end{aligned} \tag{5.18}$$

donde la última desigualdad es cierta para N grande debido a (5.15). Por tanto,

$$\sigma_N(x_N) \leq \|x_N\|_{\mathbb{X}} \lesssim h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.19}$$

Por otro lado, si $k\geq q_N$ por (5.16) se obtiene

$$\sigma_k(x_N)_{\mathbb{X}} \leq 2\|\widetilde{1}_{\Gamma_l-\Gamma_r\cap\Gamma_l}\|_{\mathbb{X}} \leq 2\|\widetilde{1}_{\Gamma_l}\|_{\mathbb{X}} \lesssim h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.20}$$

Combinando (5.18), (5.19) y (5.20) se obtiene

$$\begin{aligned}&\|x_N\|_{\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})} \lesssim h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})\\ &+\Big[\sum_{k=1}^{q_N-1}(k^\alpha h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}))^\tau\frac{1}{k} + \sum_{k=q_N}^{p_N+q_N}(k^\alpha h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X}))^\tau\frac{1}{k}\Big]^{\frac{1}{\tau}}\\ &\lesssim h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) + [h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})^r(q_N)^{\alpha\tau} + h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X})^\tau(p_N)^{\alpha\tau}]^{\frac{1}{\tau}}\\ &\lesssim h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X}) + h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})(q_N)^\alpha \lesssim h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})(q_N)^\alpha\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde en la segunda desigualdad usamos la desigualdad elemental

$$\sum_{k=a}^{a+b}k^{\gamma-1} \lesssim b^\gamma$$

si $b\geq a$ y la tercera es debida a (5.15). De (5.17) y (5.21) deducimos

$$\frac{\|x_N\|_{\mathscr{G}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}}{\|x_N\|_{\mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})}} \gtrsim \frac{h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})(p_N)^\alpha}{h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})(q_N)^\alpha} = \Big(\frac{p_N}{q_N}\Big)^\alpha \longrightarrow \infty$$

cuando $N\longrightarrow\infty$. Esto prueba el resultado. $\square$

Corolario 5.4.2. *Sea $\mathcal{B}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ tal que $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\gtrsim N^{\beta_1}$ y $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\lesssim N^{\beta_0}$, para algunos $\beta_1>\beta_0\geq 0$. Entonces, no se cumple la inclusión continua $\mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathscr{G}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ para todo $\alpha>0$ y todo $\tau\in(0,\infty]$.*

Demostración. Elegimos $r,s\in\mathbb{N}$ tales que $\frac{\alpha+\beta_0}{\alpha+\beta_1}<\frac{r}{s}<1$. Tomamos $p_N=N^s$ y $q_N=N^r$. Entonces, $\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{p_N}{q_N}=\lim_{N\longrightarrow\infty}N^{s-r}=\infty$ y

$$\frac{h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})}{h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X})}\gtrsim\frac{N^{r\beta_1}}{N^{s\beta_0}}>N^{\alpha(s-r)}=\left(\frac{N^s}{N^r}\right)^\alpha,$$

lo que prueba (5.15) para este caso. Por tanto podemos aplicar la Proposición 5.4.1. $\square$

Corolario 5.4.3. *Sea $\mathcal{B}$ una base incondicional en un espacio cuasi-Banach $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ tal que para algunos $\beta\geq 0$ y $\gamma>0$ tenemos o bien*

(i) $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\gtrsim N^\beta(\log N)^\gamma$ *y* $h_l(N)\lesssim N^\beta$,

o

(ii) $h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\gtrsim N^\beta$ *y* $h_l(N;\mathcal{B},\mathbb{X})\lesssim N^\beta(\log N)^{-\gamma}$.

Entonces, no se cumple la inclusión continua $\mathcal{A}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})\hookrightarrow\mathscr{G}_\tau^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$ para todo $\alpha>0$ y todo $\tau\in(0,\infty]$.

Demostración. (i) Elegimos $a,b\in\mathbb{N}$ tal que $0<\frac{a}{b}<\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$. Sea $p_N=N^a2^{N^b}$ y $q_N=2^{N^b}$. Entonces, $\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{p_N}{q_N}=\lim_{N\longrightarrow\infty}N^a=\infty$ y

$$\frac{h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})}{h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X})}\gtrsim\frac{(2^{N^b})^\beta(\log 2^{N^b})^\gamma}{N^a(2^{N^b})^\beta}\approx\frac{N^{b\gamma}}{N^{a\beta}}=N^{b\gamma-a\beta}>N^{a\alpha}=\left(\frac{p_N}{q_N}\right)^\alpha$$

lo que prueba (5.15) para este caso. Por eso, podemos usar la Proposición 5.4.1 para concluir el resultado.

(ii) La demostración de esta parte es similar a la de la parte (i). Elegimos $a,d\in\mathbb{N}$ y p_N y q_N como en la prueba de la parte (i) y tenemos

$$\begin{aligned}\frac{h_r(q_N;\mathcal{B},\mathbb{X})}{h_l(p_N;\mathcal{B},\mathbb{X})}&\gtrsim\frac{(2^{N^b})^\beta}{(N^a2^{N^b})^\beta(\log N^a2^{N^b})^{-\gamma}}=\frac{(\log N^a2^{N^b})^\gamma}{N^{a\beta}}\gtrsim\frac{(\log 2^{N^b})^\gamma}{N^{a\beta}}\\&\approx\frac{N^{b\gamma}}{N^{a\beta}}=N^{b\gamma-a\beta}>N^{a\alpha}=\left(\frac{p_N}{q_N}\right)^\alpha\end{aligned}$$

esto prueba (5.15) para este caso. Por tanto, podemos usar la Proposición 5.4.1 para concluir el resultado. $\square$

5.5. Desigualdades de tipo Jackson y la propiedad H

En esta sección presentamos una versión del Teorema 3.4.6, sustituyendo la condición $\eta \in \mathbb{W}_+$ por la propiedad (H) de $\mathcal{B}$.

Teorema 5.5.1. *Sea* $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una base incondicional en un espacio cuasi-Banach* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$. *Supongamos que* $\mathcal{B}$ *satisface la* ***Propiedad (H)*** *(ver Definición 5.3.1). Sean* $\alpha > 0$ *y* $0 < q \leq \infty$ *fijos. Entonces, para cualquier sucesión* $\{\eta(k)\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{W}$ *las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe* $C > 0$ *tal que para todo* $N = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Big\| \sum_{k\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}} \Big\|_{\mathbb{X}} \leq C\eta(N), \quad \forall\ \Gamma \subset \mathbb{N}. \tag{5.22}$$

2. $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{B},\mathbb{X})$.

3. *(Desigualdad de tipo Jackson para* $\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})$*). Existe* $C_{\alpha,q} > 0$ *tal que para todo* $N = 1, 2, \ldots,$ *se tiene*

$$\sigma_N(x;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq C_{\alpha,q} N^{-\alpha} \|x\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})}, \quad \forall\ x \in \ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.23}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la Nota 3.4.8, solo hace falta probar la implicación 3. $\Longrightarrow$ 1. Sea

$$\widetilde{1}_\Gamma = \sum_{k\in\Gamma} \frac{e_k}{\|e_k\|_{\mathbb{X}}}.$$

Empezamos con el caso $N = 2^n$. De la Propiedad (H) de $\mathcal{B}$ existe $\Gamma = \Gamma_{n+1} \subset \mathbb{N}$ con $|\Gamma| = 2^{n+1}$ tal que para todo $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 2^n$ tenemos

$$\|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathbb{X}} \approx h_r(2^n;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.24}$$

Por (2.6) en [27] (ver 3.3) tenemos

$$\sigma_{2^n}(\widetilde{1}_\Gamma)_{\mathbb{X}} = \inf_{\substack{|\Gamma'|=2^n \\ \Gamma'\subset\Gamma}} \|\widetilde{1}_{\Gamma'}\|_{\mathbb{X}} \approx h_r(2^n;\mathcal{B},\mathbb{X}). \tag{5.25}$$

Por otro lado, por el Lema 3.3.5 (observe que $k^\alpha\eta(k) \in \mathbb{W}_+$ cuando $\eta \in \mathbb{W}$) y la propiedad doblante de η tenemos

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)}(\mathcal{B},\mathbb{X})} \approx 2^{(n+1)\alpha}\eta(2^{n+1}) \lesssim 2^{n\alpha}\eta(2^{n\alpha}). \tag{5.26}$$

De (5.26) y la hipótesis 3. se deduce

$$h_r(2^n;\mathcal{B},\mathbb{X}) \approx \sigma_{2^n}(\widetilde{1}_\Gamma)_{\mathbb{X}} \leq C_{\alpha,q} 2^{-n\alpha} \|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\ell^q_{k^\alpha\eta(k)(\mathcal{B},\mathbb{X})}} \lesssim \eta(2^{n\alpha}).$$

Esto prueba (5.22).
Para N general elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n-1} < N \leq 2^n$ y usando la propiedad doblante de η, para $\Gamma \in \mathcal{D}$ con $|\Gamma| = N$, se tiene

$$\|\widetilde{1}_\Gamma\|_{\mathbb{X}} \leq h_r(N;\mathcal{B},\mathbb{X}) \leq h_r(2^n;\mathcal{B},\mathbb{X}) \lesssim \eta(2^n) \lesssim \eta(2^{n-1}) \leq \eta(N).$$

$\square$

Bibliografía

[1] H.A Aimar, A.L. Bernardis, and F.J. Martín-Reys, *Multiresolution Approximation and Wavelet Bases of Weighted L^p Spaces*, J. Fourier Anal. and Appl. 9, n 5, (2003), 497–510.

[2] A. Almeida, *Wavelet bases in generalized Besov spaces*, J. Math. Anal. Appl. 304(2005) 198–211.

[3] C. Bennet, and R. C. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Appl. Math. vol. 129, Academic Press, Orlando, Fl, 1988.

[4] J. Bergh, and J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, 1976.

[5] S.N. Bernstein, *Sur l'ordre de meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes*, Académie Royale de Belgique, Classe des Sciencies, Mémoires Colletion in 4°, ser. II, 13(1912), 49–194.

[6] M. Bownik, *Atomic and mulecular decompositions of anisotropic Besov spaces*, Math. Z. 250, (2005), 539–571. DOI: 10.1007/s00209-005-0765-1

[7] M. Bownik, and K.-P. Ho, *Atomic and mulecular decompositions of anisotropic Triebel-Lizorkin Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 358, (2006), 1469–1510.

[8] H.-Q. Bui, *Weighted Besov and Triebel spaces: interpolation by the real method*, Hiroshima Math. J., 12(1982), no. 3, 381–605.

[9] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation: the complex method*, Studia Math. 24, 113–190.

[10] M. J. Carro, J. Raposo, and J. Soria, *Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities*, Mem. Amr. Math. Soc., no. 877, 187(2007).

[11] F. Cobos, and D. Fernandez, *Hardy-Sobolev and Besov spaces with a function parameter*, in: M. Cwikel, J. Peetre, J. Shager, H. Walln (Eds.), Functions Spaces and Applications, Lund, (1986), in: Lecture Notes in Math., vol. 1302, Springer, Berlin, (1988), pp. 158–170.

[12] J. Garcia-Cuerva, and J.L. Rubio de Francia *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland Mathematical Studies 116, Elsevier Sciences Publishers, 1985.

[13] D. Cruz-Uribe, J.M Martell, and C. pérez, *Weights, Extrapolation and Theory of Rubio de Francia*, Preprint, (2008).

[14] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Coference Series in applied Maths., Philadelphia, Pennsylvania, 61, 1992.

[15] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 42, (1988), 909–996.

[16] R. A. DeVore, *Nonlinear approximation*, Acta Numerica, (1998) 51–150.

[17] R. A. DeVore, and G. G. Lorentz, *Construtive Approximation*, Vol. 303 of Grundlehren, Springer, Heidelberg, (1993).

[18] R. DeVore, and V.A. Popov, *Interpolation spaces and nonlinear approximation*, Function spaces and applications (Lund, 1986), Lecture Notes in Math., **1302**, Springer, Berlin, (1988), 191–205.

[19] R.A. DeVore, and V.N. Temlyakov, *Some remarks on greedy alghorithms*, Adv. Comp. Math. 5, (2-5)(1996), 113–187.

[20] S. Dilworth, N. Kalton, D. Kutzarova, and V. Temlyakov, *The thersholding greedy algorithm, greedy base and duality*, Constr. Approx. 19 (2003) 575–597.

[21] W. Farkas, and H.-G. Leopold, *Characterizations of function spaces of generalized smoothness*, Ann. Mat. Pura Appl. 185(2006), 1–62.

[22] M. Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss, *Littlewood-Paley theory and study of function spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 79 (1991).

[23] M. Frazier, and B. Jawerth, *Decomposition of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J., 34, (1985), 777–799.

[24] M.Frazier, and B. Jawerth, *A discrete transform and decomposition of distribution spaces*, J. Func. Anl., (93): (1990), 34–170.

[25] J. García-Cuerva, and K. S. Kazarian, *Calderón-Zygmund operators and uncondicional bases of weighted Hardy spaces*, Studia Math., volume 109, no. 3, (1994), 255–279.

[26] J. García-Cuerva, and J. Martell, *Wavelet characterization of weighted spaces*, J. Geom. Anal. 11, no. 2,(2001), 241–262.

[27] G. Garrigós, and E. Hernández, *Sharp Jackson and Bernstein inequalities for N-term approximation in sequence spaces with applications*, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004) 1739–1762.

[28] G. Garrigós, E. Hernández, and M. Natividade, *Democracy Functions and Optimal Embeddings for Approximations Spaces*, Prepublicación (2009).

[29] G. Garrigós, E. Hernández, and J. M. Martell, *Wavelets, Orlicz spaces, and greedy bases*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 24 (2008) 70–93.

[30] R. Gribonval, and M. Nielsen, *Some remarks on non-linear approximation with Schauder bases*, East. J. Approximation, 7(2), (2001), 1–19.

[31] H. Haroske, and H. Triebel, *Wavelet bases and entropy numbers in weighted functions spaces*, Math. Nachr. 278, no 1-2, (2005), 108–132.

[32] E. Hernández, J.M. Martell, and M. Natividade, *Quantifying Democracy of Wavelet bases in Lorentz Spaces*, Constr. Approx. (2010).

[33] E. Hernández, and G. Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, Boca Raton FL, 1996.

[34] A. Haar, *Zur theorie der orthogonalen funktionen systeme*, Math. Ann., 69, (1910), 331–371.

[35] C. Hsiao, B. Jawerth, B.J. Lucier, and X. M. Yu, *Near optimal compression of almost optimal wavelet expansions*, in: J.J Benedetto, M. W. Frazier (Eds.), Wavelets: Mathematics and Applications, in: Stud. Adv. Math. Nachr. 133 (1987) 7–32.

[36] M. Izuki, and Y. Sawano, *Wavelet bases in the weighted Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces with A_p^{loc}-weights*, Journal of Approx. Theory, 161, (2009), 656–673.

[37] D. Jackson, *On the approximation by trigonometric sums and polynomials*, TAMS 13 (1912), 491–515.

[38] B. Jawerth, and M. Milman, *Wavelets and best approximation in Besov spaces. Interpolation and related topics*, (Haifa, 1990), Israel Math. Conf. Proc., 5, Bar-Ilan., Ramat Gan, (1992), 107–112.

[39] A. Kamont, and V.N. Temlyakov, *Greedy approximation and multivariate Haar system*, Studia Math. 161 (3) (2004) 199–223.

[40] G.Kerkyacharian, and D. Picard, *Nonolinear Approximation and Muckenhoupt Weights*, Constr. Approx. DOI:10.1007/s00365-005-0618-5, 24:(2006), 123–156.

[41] G. Kerkyacharian, and D. Picard, *Entropy, universal coding, approximation and bases properties*, Constr. Approx.,20,(2004), 1–37. DOI:10.1007/s00365-003-0556-z

[42] V. Kokilashvili, and M. Krebec, *Weigthed Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Word Scientific, Singapore, 1991.

[43] S. V. Konyagin, and V. N. Temlyakov, *A remark on greedy approximation in Banach spaces*, East J. Approx. 5 (1999) 365–379.

[44] S. Krein, J. Petunin, and E. Semenov, *Interpolation of Linear opperators*, Traslations Math. Monographs, vol. 55, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1982.

[45] G. Kyriazis, *Multilevel characterization of anisotropic function spaces*, SIAM J. Math. Anal. 36(2004),441–462.

[46] P.G. Lemarié, and Y. Meyer, *Ondelettes et bases Hilbertiannes*, Rev. Mat. Iberoamericana, 2, (1986), 1–18.

[47] H.-G. Leopold, *Embeddings and entropy numbers in Besov of generalized smoothness*, Function, spaces (poznari, 1998), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 213, Dekker, New York, 2000, 323–336.

[48] J. L. Lions, and J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. N° 19 (1964), 5–68.

[49] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1998.

[50] C. Merucci, *Applications of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces. Interpolation spaces and allied topics in analysis*, Lecture Notes in Math., 1070, Springer Berlin, (1984), 183–201.

[51] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Vols 1 and 2, Herman, Paris, 1990. [traducción en inglés: Wavelet and operators, Cambridge University Press, 1992.]

[52] F.G. Montenegro, *Caracterización de espacios de Orlicz pesados a través de wavelets*, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2006

[53] M. Natividade, *Best approximation with wavelets in weighted Orlicz spaces*, Prepublicación (2009).

[54] B. Opic and L. Pick, *On Generalized Lorentz-Zygmund Spaces*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 2, Number 3 (1999), 391–467.

[55] P. Oswald, *Greedy Algorithms and Best m-Term Approximation with respect to Biorthogonal Systems*, J. Fourier Anl. and Appl. 7, No. 4, (2001), 325–341.

[56] J. Peetre, *New Thought on Besov Spaces*, Duke Univ. Math. Series, Durham, N.C., 1976.

[57] J. Peetre, and G. Sparr, *Interpolation of normed Abelian groups*, Ann. Mat. Pura Appl., (92)(1972),217–262.

[58] V. Peller, *Hankel operators of the class S_p, invetigations of the rate of rational approximation and other applications*, Mat. Sbornik, (1980) 122, 481–510.

[59] P. Perkarskii, *Estimates for the derivatives of rational function in $L^p[-1,1]$*, Math. Zamettki, 39 (1985), 388–394.

[60] L. Persson, *Interpolation with a parameter function*, Math. Scand. 59(1986) 199–222.

[61] P.P. Petrushev, *On the relation beteween rational and spline approximations*, Constructive Theory of Functions 1984, Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna 1984, Sofia 1984, 672–674.

[62] P.P. Petrushev, *Direct and converse theorems for spline and rational approximation and Besov spaces*, in Function Spaces and Applications (M. Cwikel et al., eds), Vol. 1302 of Lecture Notes in Mathematcs, Springer, Berlin, (1988), 363–377.

[63] A. Pietsch, *Approximation spaces*, Journal of Approximation Theory, 32, (1981), 113–134.

[64] J.A. Raposo, *Acotación de operadores maximales en Análisis Armónico*, Ph. D. Thesis, Deparmento de Matemática Aplicada i Análisi, Universidad de Barcelona, (1998).

[65] R. Rochberg and M. Taibleson, *An averaging operator on a tree*, in Harmonic analysis and partial diffrential equations (El escorial, 1987), 207–213, Lecture Notes in Math., 1384, Springir, Berlin, 1989.

[66] S. Roudenko, *Matrix-weighted Besov Spaces*, Trans. Amer. Soc., 355(1),(2003),273–314.

[67] S. Roudenko, *The Theory of Functions Spaces with Matrix Weights*, Ph. D. Thesis, Departament of Mathematics, Michigan State University, (2002).

[68] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, I, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[69] P. M. Soardi, *Wavelet Bases in Rearrangement Invariant Function Spaces*, Proc. Amerc. Math. Soc., no. 12,125 (1997), 3669–3673.

[70] S. B. Stechkin, *On absolute convergence of orthogonal series*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 102 (1955), 37–40.

[71] E. M. Stein, and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

[72] V. N. Temlyakov, *Nonlinear Methods of Approximation* , Found. Comput. Math. 3 (2003), 33–107.

[73] V. N. Temlyakov, *The best m-term approximation and greedy algorithms*, Adv. Comput. Math. 8 (1998) 249–265.

[74] P. Wojtaszczyk, *Greedy Algorithm for General Biorthogonal System*, Journal of Approximation Theory, 107, (2000), 293–314.

[75] P. Wojtaszczyk *Wavelets as unconditional bases in $L^p(\mathbb{R})$*, J. Fourier Anal. Appl. 5(1999), no.1, 73–85.

[76] P. Wojtaszczyk, *The Franklin system is an uncondicional basis in H_1*. Ark. Mat.20 (1982), no. 2, 293–300.

[77] P. Wojtaszczyk, *Greediness of the Haar system in rearrangement invariant spaces*, Approximation and Probability, Banach Center Publications 72, T. Figiel and A. Kamont, Eds., Warszawa, (2006), 385–395